Khôlles MPSI2 2020-2021

POULLOT Germain

Septembre 2020 - 12 juin 2021

Résumé

Attention ! Les khôlles présentées ici n'ont bien évidement pas vocation à remplacer les excellents exercices vus en cours. Si vous avez du temps et cherchez des exercices en plus, alors vous pouvez lire ces sujets. Les corrections sont disponibles dans la deuxième partie. Parfois, un exercice est entièrement corrigé, parfois partiellement, et parfois encore, vous serez juste redirigés vers le cours, une vidéo ou un site. Certaines khôlles sont longues, d'autres très courtes; certaines faciles, d'autres particulièrement ardues : apprendre à détecter ce que vous savez faire et ce qui est difficile est aussi un bon exercice !

Si vous avez une question quelconque ou une remarque, vous pouvez me contacter : germain.poullot@polytechnique.edu (n'oubliez pas de signer votre mail, s'il-vous-plaît).

Les khôlles des autres classes et des autres années sont disponibles sur ma page web : https://webusers.imj-prg.fr/germain.poullot/Kholles

Bonne chance !

Table des matières

1 Sujets de Khôlles

1.1 Programme 1 : Trigonométrie et Logique

1.1.1 Khôlle 1 : Trigonométrie

Exercise 1.1 (Question de cours)**.** Tracez un cercle trigonométrique, rappelez les principales formules et surtout énoncez (avec une démonstration par le dessin) 2 formules permettant d'échanger cos et sin.

Exercise 1.2 (Problème principal)**.** Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Exercise 1.3 (Question subsidiaire)**.** Montrez que : $\sin^2 + \cos^2 = 1$ et $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Solution ici : Section 2.1.

1.1.2 Khôlle 2 : Logique

Exercise 1.4 (Question de cours)**.** Donnez les tables de vérité des opérateurs logiques $\wedge$ (*et*), $\vee$ (*ou*), $\neg$ (*non*), $\Rightarrow$ (*implique*), $\Leftrightarrow$ (*équivalent*).

Attendre que le khôllé demande la définition d'une table de vérité (qui n'est pas directement au programme de Terminale).

Definition 1.1 (Table de vérité)**.** Page Wikipédia correspondante

Exercise 1.5 (Problème principal)**.** Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$. *Il s'agit du principe de disjonction.*

Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$. *Il s'agit de la loi de Pierce.*

Exercise 1.6 (Question subsidiaire)**.** Me donner la traduction du principe de disjonction avec des phrases en français.

Remplacer les dernières implications par des équivalences.

Re-démontrer la loi de Pierce avec des équivalences.

Solution ici : Section 2.2.

1.1.3 Khôlle 3 : Logique

Exercise 1.7 (Question de cours)**.** Énoncez (formellement) le théorème de Thalès, sa réciproque et sa contraposée. Démontrez-en la vérité ou la fausseté sur des exemples.

Exercise 1.8 (Problème principal)**.** Prouvez la proposition :

P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

<u>Indice :</u> On peut raisonner par contraposée.

Exercise 1.9 (Question subsidiaire)**.** Partagez un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, 7, 8, 9, 10 et 11.

Montrez qu'on peut partager un carré en n carrés pour $n \geq 6$ et conclure.

(Comment compter le nombre de manière de séparer un carré en n carrés ?)

Solution ici : Section 2.3.

1.1.4 Khôlle 4 : Trigonométrie

Exercise 1.10 (Question de cours)**.** Calculer $\cos\frac{\pi}{12}; \sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{8}; \sin\frac{\pi}{8}$.

Exercise 1.11 (Problème principal)**.** Montrez que

$$\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \cos(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \sin(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n)$.

Exercise 1.12 (Question subsidiaire)**.** Calculez :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Solution ici : Section 2.4.

1.1.5 Khôlle 5 : Trigonométrie

Exercise 1.13 (Question de cours)**.** Calculer (on doit trouver $\frac{3}{2}$) :

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$$

Exercise 1.14 (Problème principal)**.** Résoudre l'équation :

$$2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{4\sin^2 x-3} = 20$$

(On doit trouver $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.)

Exercise 1.15 (Question subsidiaire)**.** Résoudre l'équation : $\cos 3x = \sin 2x$. Grâce à la formule $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, en déduire les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{10}\}$.

Solution ici : Section 2.5.

1.1.6 Khôlle 6 : Logique

Exercise 1.16 (Question de cours)**.** Soit p un prédicat à 2 variables. Que pensez-vous de l'assertion $(\forall x, \exists y, p(x,y)) \Rightarrow \exists y, p(y,y)$?

Il faudra penser à interpréter l'assertion en français, par exemple avec les prédicats "x est le père de y" et "y est le père de x".

Exercise 1.17 (Problème principal)**.** Soit $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que H_n n'est jamais entier.

Indice : On pourra écrire H_n comme un quotient et s'intéresser à la parité du numérateur et du dénominateur.

Exercise 1.18 (Question subsidiaire)**.** Démontrer que tout nombre naturel est divisible par un nombre premier.

Solution ici : Section 2.6.

1.2 Programme 2 : Trigonométrie, Calculs algébriques

1.2.1 Khôlle 7 : Binôme de Newton, Pavage par carrés

Exercise 1.19 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la formule du binôme de Newton (attention à l'hypothèse a et b commutent !).

Exercise 1.20 (Problème principal)**.** Partagez un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, 7, 8, 9, 10 et 11.

Montrez qu'on peut partager un carré en n carrés pour $n \geq 6$ et conclure.

(Comment compter le nombre de manière de séparer un carré en n carrés ?)

Exercise 1.21 (Question subsidiaire)**.** Quel est le plus grand terme dans le développement de $(a+b)^n$ où $a, b \in \mathbb{R}_*^+$?

Solution ici : Section 2.7.

1.2.2 Khôlle 8 : Cosinus du 20ème de cercle, Chu-Vandermonde

Exercise 1.22 (Question de cours)**.** En théorie des ensembles, rappelez les définitions et les propriétés de l'union, de l'intersection et du "privé de".

Exercise 1.23 (Problème principal)**.** Résoudre l'équation : $\cos 3x = \sin 2x$. Grâce à la formule $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, en déduire les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{10}\}$.

Exercise 1.24 (Question subsidiaire)**.** [Formule de Chu-Vandermonde] Soient $p \leq q \leq m$. En développant de deux manière différentes $(1+x)^m$, montrez que :

$$\binom{m}{q} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{m-p}{q-k}$$

Solution ici : Section 2.8.

1.2.3 Khôlle 9 : Sommation d'Abel, Sommation de cosinus

Exercise 1.25 (Question de cours)**.** Soient E et F des ensembles. Donner la définition de $\mathcal{P}(E)$, et montrez que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.

Exercise 1.26 (Problème principal)**.** [Sommation d'Abel] Soient deux familles de nombres complexes $(a_k)_k$ et $(B_k)_k$. On définit $A_n = \sum_{j=0}^n a_j$ et $b_j = B_{n+1} - B_n$. Montrez que : $\sum_{j=0}^n a_j B_j = A_n B_n - \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_j$. En déterminer $\sum_{k=0}^n k2^k$.

Exercise 1.27 (Question subsidiaire)**.** Montrez que

$$\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \cos(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \sin(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n)$.

Solution ici : Section 2.9.

1.2.4 Khôlle 10 : Sommations trigonométriques

Exercise 1.28 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'un produit cartésien et montrez que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(Pourquoi ne dit-on pas "le produit cartésien est distributif sur l'union" ?)

Exercise 1.29 (Problème principal)**.** Soit $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez $2 \sin \frac{\theta}{2} C_n$ et en déduire C_n.

Exercise 1.30 (Question subsidiaire)**.** Calculez $A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercise 1.31 (Question subsidiaire)**.** Trouvez une méthode pour calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.10.

1.2.5 Khôlle 11 : Trigonométrie, Ensembles

Exercise 1.32 (Question de cours)**.** Simplifiez $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$ et en déduire $\tan \frac{\pi}{24}$. Quels sinus et cosinus s'en déduisent ?

Exercise 1.33 (Problème principal)**.** Discutez et résoudre pour un ensemble E fixé et $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cap X = B$
- $A \cup X = B$
- $A \Delta X = B$

Exercise 1.34 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$ et $\sum_{1 \leq i,j \leq n} i$. En déduire (presque) sans calcul $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$ et $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$.

Solution ici : Section 2.11.

1.2.6 Khôlle 12 : Racine rationnelle des polynômes rationnels

Exercise 1.35 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la formule du binôme de Newton (attention à l'hypothèse a et b commutent !).

Exercise 1.36 (Problème principal)**.** Montrer que si α est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ avec a, b et c impairs, alors α est irrationnel.

Exercise 1.37 (Question subsidiaire)**.** Résoudre l'équation :

$$2^{4\cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$$

(On doit trouver $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.)

Solution ici : Section 2.12.

1.3 Programme 3 : Analyse de T^{le}, Calculs algébriques

1.3.1 Khôlle 13 : Étude de fonctions, ln

Exercise 1.38 (Question de cours)**.** Rappelez la formule de la dérivée d'une composée et la définition du nombre α^x. En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto \alpha^x$.

Exercise 1.39 (Problème principal)**.** Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (ensemble de définition, graphe, etc).

En déduire la résolution de l'équation $a^b = b^a$ ou a et b sont entiers naturels.

Exercise 1.40 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Solution ici : Section 2.13.

1.3.2 Khôlle 14 : Étude de fonctions, ln

Exercise 1.41 (Question de cours)**.** Montrez grâce aux dérivée que si $\ln f$ est d'une certaine monotonie, alors f est de cette même monotonie.

Exercise 1.42 (Problème principal)**.** Montrez que $\forall x \in]0;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$. (On demandera aussi le graphe de la fonction $f : x \mapsto x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Étudiez aussi les cas limites ($x \to 0$ et $x \to 1$).

Exercise 1.43 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i \in [|1;n|]} \in \mathbb{R}_+^*, \sum_i a_i \times \sum_i \frac{1}{a_i} \geq n^2$

Solution ici : Section 2.14.

1.3.3 Khôlle 15 : Trigonométrie et étude de fonctions

Exercise 1.44 (Question de cours)**.** Soit f une fonction à valeur réelle. Exprimez $f^+; x \mapsto f(x)^+$ et $f^- : x \mapsto x^-$ en fonction de $|f| : x \mapsto |f(x)|$ et f.

Exercise 1.45 (Problème principal)**.** Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercise 1.46 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercise 1.47 (Question subsidiaire)**.** Généralisez : soit P et Q deux fonctions polynomiales (réelles), dans quels cas la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{P}{Q}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.15.

1.4 Programme 4 : Analyse réelle, Trigonométrie réciproque

1.4.1 Khôlle 16 : Polynôme de degré 3

Exercise 1.48 (Question de cours)**.** Tracez $\arccos\cos(x)$ et $\arcsin\sin(x)$.

Exercise 1.49 (Problème principal)**.** Faites l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Déterminez graphiquement et numériquement $Q(x) := P(x - \frac{b}{3a})$ (on doit retrouver les polynômes de la forme $X^3 + pX + q$, qui sont "centrés".)

Construisez un discriminant pour les polynômes $X^3 + pX + q$.

Exercise 1.50 (Question subsidiaire)**.** Déterminez : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Solution ici : Section 2.16.

1.4.2 Khôlle 17 : Trigonométrie hyperbolique et circulaire

Exercise 1.51 (Question de cours)**.** Donnez et justifiez les graphe de arctan et tan puis de $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.

Exercise 1.52 (Problème principal)**.** On suppose que $x = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$.

Montrez que $\tanh\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$; $\tanh x = \sin y$ et $\cosh x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercise 1.53 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.17.

1.4.3 Khôlle 18 : Équations logarithmiques

Exercise 1.54 (Question de cours)**.** Énoncez le théorème de la bijection. Donnez un contre-exemple dans le cas où f n'est pas continue, où f n'est pas strictement monotone, où l'ensemble de définition n'est pas un intervalle.

Exercise 1.55 (Problème principal)**.** Résoudre $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$.

Exercise 1.56 (Question subsidiaire)**.** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\ln_x y + 2\ln_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

Exercise 1.57 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Solution ici : Section 2.18.

1.4.4 Khôlle 19 : Sommes, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 1.58 (Question de cours)**.** Tracez sur le même graphe les fonctions arccos, arcsin et arctan.

Exercise 1.59 (Problème principal)**.** Résoudre $\sum_{k=1}^{100} \sinh(2+kx) = 0$

Exercise 1.60 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i\in[|1;n|]} \in \mathbb{R}_+^*, \sum_i a_i \times \sum_i \frac{1}{a_i} \geq n^2$

Exercise 1.61 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\forall n \geq 3, \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$.

Solution ici : Section 2.19.

1.4.5 Khôlle 20 : Équation hyperbolique

Exercise 1.62 (Question de cours)**.** Soit f et g deux fonctions monotones. Parlez-moi de leur somme, leur produit et leur composée.

Exercise 1.63 (Problème principal)**.** Résoudre en fonction de a, b et c des réels, l'équation $a\cosh x + b\sinh x = c$.

Exercise 1.64 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifiez $\sinh^2 x \cos^2 x + \cosh^2 x \sin^2 x$.

Solution ici : Section 2.20.

1.4.6 Khôlle 21 : Tracés et logarithmes

Exercise 1.65 (Question de cours)**.** Tracer sur un même graphe sinh, cosh et tanh.

Exercise 1.66 (Problème principal)**.** Tracez le graphe de $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercise 1.67 (Question subsidiaire)**.** Résoudre : $\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10) = 0$.

Solution ici : Section 2.21.

1.5 Programme 5 : Applications

1.5.1 Khôlle 22 : Bijectivité contrainte

Exercise 1.68 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'inégalité triangulaire.

Exercise 1.69 (Problème principal)**.** Soient trois applications f, g et h telles que les compositions $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ soient définies, que 2 d'entre elles soient injectives et la troisième surjective. Montrez que f, g et h sont bijectives.

Exercise 1.70 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Solution ici : Section 2.22.

1.5.2 Khôlle 23 : Non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Exercise 1.71 (Question de cours)**.** Démontrez que toute fonction réelle s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une impaire. Quelle est la décomposition de l'exponentielle ?

Exercise 1.72 (Problème principal)**.** Soit E un ensemble. Montrez qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. En regardant $\{x \in E; x \notin f(x)\}$, montrez qu'une telle injection ne saurait être une bijection. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercise 1.73 (Question subsidiaire)**.** Résoudre : $\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10) = 0$.

Solution ici : Section 2.23.

1.5.3 Khôlle 24 : Théorème de Cantor-Berstein

Exercise 1.74 (Question de cours)**.** Si $f \circ g$ (qu'on suppose défini) est surjective, que peut-on dire ? Et si $f \circ g$ est injective ? bijective ?

Exercise 1.75 (Problème principal)**.** Montrez que l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ induit une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$.

Exercise 1.76 (Question subsidiaire)**.** [Théorème de Cantor-Berstein]. Soient E et F deux ensembles munies d'injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On veut montrez qu'il existe une bijection entre E et F. Démontrez le théorème pour E **ou** F fini(s). On note $g^{-1}(x)$ l'antécédant de x par g (idem pour $f^{-1}(y)$). On regarde : x, $g^{-1}(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(x))$, $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$,... On note A la partie de E contenant tous les x pour lesquels cette suite est finie et a son dernier élément dans E. On pose $h : E \to F$, montrez que c'est une bijection :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \in A \\ g^{-1}(x) \ si \ x \notin A \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.24.

1.5.4 Khôlle 25 : Dénombrabilité par bijection explicite de Cantor

Exercise 1.77 (Question de cours)**.** Énoncez le théorème de la bijection. Donnez un contre-exemple dans le cas où f n'est pas continue, où f n'est pas strictement monotone. Que se passe-t-il quand l'ensemble de définition n'est pas un intervalle.

Exercise 1.78 (Problème principal)**.** On définit l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par $f(x,y) = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$. Montrez que f est bien définie et que c'est une bijection.

En déduire que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout k, puis que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercise 1.79 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifiez $\sinh^2 x \cos^2 x + \cosh^2 x \sin^2 x$.

Solution ici : Section 2.25.

1.5.5 Khôlle 26 : Stable engendré par la dynamique de f

Exercise 1.80 (Question de cours)**.** Rappelez la définition de injective, surjective, bijective et montrez qu'une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercise 1.81 (Problème principal)**.** Soit $f : E \to E$. On note $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n fois), avec $f^0 = Id_E$. Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_n A_n$.

Montrez que $f(B) \subset B$, puis que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) stable par f et contenant A.

Exercise 1.82 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction de $E(\neq \emptyset)$ dans lui-même tel que $f \circ f = f$. Montrez que f est injective ssi f est surjective.

Donnez un exemple de tel f qui ne soit ni injectif (ni surjectif).

Que se passe-t-il si on suppose à la place $f \circ f \circ ... \circ f = f$?

Solution ici : Section 2.26.

1.5.6 Khôlle 27 : Application dans les ensembles

Exercise 1.83 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la dérivée d'une composée et de la dérivée d'une réciproque.

Exercise 1.84 (Problème principal)**.** Soit E un ensemble doté d'un sous-ensemble A. Soit $\varphi_A : X \mapsto X \cap A$ et $\psi_A : X \mapsto X \cup A$. Montrez que :

- φ_A est injective ssi φ_A est surjective ssi $A = E$.
- ψ_A est injective ssi ψ_A est surjective ssi $A = \emptyset$.

Exercise 1.85 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.27.

1.6 Programme 6 : Application, Relations binaires

1.6.1 Khôlle 28 : Images directe et réciproque

Exercise 1.86 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de partition en classes d'équivalence.

Exercise 1.87 (Problème principal)**.** Soit $f : E \to E$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\hat{f} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est surjective si et seulement si $f \circ \hat{f} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 1.88 (Question subsidiaire)**.** Étudiez les relations suivantes : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$; $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q$ sur $\mathbb{R}\backslash] - 1; 1[$.

Solution ici : Section 2.28.

1.6.2 Khôlle 29 : Théorème de Cantor-Berstein

Exercise 1.89 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'une image directe et d'une image réciproque.

Exercise 1.90 (Problème principal)**.** [Théorème de Cantor-Berstein]. Soient E et F deux ensembles munies d'injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On veut montrez qu'il existe une bijection entre E et F. Démontrez le théorème pour E **ou** F fini(s). On note $g^{-1}(x)$ l'antécédant de x par g (idem pour $f^{-1}(y)$). On regarde : x, $g^{-1}(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(x))$, $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$,... On note A la partie de E contenant tous les x pour lesquels cette suite est finie et a son dernier élément dans E. On pose $h : E \to F$, montrez que c'est une bijection :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \in A \\ g^{-1}(x) \ si \ x \notin A \end{cases}$$

Exercise 1.91 (Question subsidiaire)**.** Soit, sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et dénombrez ses classes d'équivalence.

Solution ici : Section 2.29.

1.6.3 Khôlle 30 : Point fixe d'une application croissante

Exercise 1.92 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'une borne supérieure (et d'une borne inférieur) avec des exemples.

Exercise 1.93 (Problème principal)**.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné dont toute partie admet des bornes inférieure et supérieure. Soit $f : E \to E$ croissante. Soit $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$, montrez que $X \neq \emptyset$. Montrez que $f(X) \subseteq X$. Soit $a = \sup X$, montrez que $a \in X$ et $f(a) = a$. Donnez un exemple.

Exercise 1.94 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : E \to E$. On note $f^n = f \circ ... \circ f$, et $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Pour $A \subseteq E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_n A_n$. Montrez que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) stable par f et contenant A.

Solution ici : Section 2.30.

1.7 Programme 7 : Nombres complexes 1

1.7.1 Khôlle 31 : Géométrie complexe

Exercise 1.95 (Question de cours)**.** Expliquez en quoi "la conjugaison complexe est un automorphisme de corps". Donnez son ensemble de points fixes.

Exercise 1.96 (Problème principal)**.** [Identité de la médiane] Montrez que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interprétez géométriquement. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$, montrez que $|z| + |z'| = \left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|$

Exercise 1.97 (Question subsidiaire)**.** Trouvez les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Solution ici : Section 2.31.

1.7.2 Khôlle 32 : Équation dans les complexes

Exercise 1.98 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, ainsi que ses corollaires.

Exercise 1.99 (Problème principal)**.** Soit (E) l'équation $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Montrez que les solutions de (E) sont des imaginaires purs. Montrez que si z est solution de (E) alors $-z$ aussi. Résoudre (E).

Exercise 1.100 (Question subsidiaire)**.** Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Solution ici : Section 2.32.

1.7.3 Khôlle 33 : Complexes et trigonométrie

Exercise 1.101 (Question de cours)**.** Expliquez comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il pour un polynôme de degré quelconque ?

Exercise 1.102 (Problème principal)**.** [Problème de Thébault (n°2)] Soit un carré $ABCD$. Soient E et F tels que BCE et CDF soient équilatéraux (extérieurs au carré). Montrez que AFE est équilatéral. Soient G et H tels que BGC et CHD soient équilatéraux (intérieurs au carré). Montrez que AHG est équilatéral et comparez les aires de AFE et AHG.

Exercise 1.103 (Question subsidiaire)**.** On pose la relation binaire sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$: $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z\sin\theta}$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution ici : Section 2.33.

1.7.4 Khôlle 34 : Application dans les complexes

Exercise 1.104 (Question de cours)**.** Expliquez ce qu'est l'affixe d'un nombre complexe (bijection $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) et exprimez $\Re(z)$ et $\Im(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

Exercise 1.105 (Problème principal)**.** Montrez que (et que pensez-vous de la réciproque ?) :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}, (|z_1| = |z_2| = 1 \ et \ |2 + z_1 z_2| = 1) \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

Exercise 1.106 (Question subsidiaire)**.** (ESSIM '93) On définit sinh, cosh et tanh sur $\mathbb{C}$ par les mêmes formules que sur $\mathbb{R}$. Donnez l'ensemble de définition de tanh. Résoudre $\tanh z = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\tanh z| < 1$. En déduire que tanh réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Solution ici : Section 2.34.

1.7.5 Khôlle 35 : Polynôme complexe

Exercise 1.107 (Question de cours)**.** Expliquez ce qu'est l'argument d'un nombre complexe (forme exponentielle, bijection $\mathbb{R} \times [0, \pi/2[\simeq \mathbb{C}$, morphisme...). En déduire une CNS pour dire que 3 points sont alignés.

Exercise 1.108 (Problème principal)**.** Montrez que les solutions de $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} - nz^n = 0$ sont de module ≤ 1. Y a-t-il des solutions de module 1 ?

Exercise 1.109 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

Solution ici : Section 2.35.

1.7.6 Khôlle 36 : Équation du second degré

Exercise 1.110 (Question de cours)**.** Qu'est-ce que le "groupe des unités" et pourquoi "groupe" ? Parlez de $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Exercise 1.111 (Problème principal)**.** Résoudre le système $x + y = 1 + i$ et $xy = 2 - i$.

Exercise 1.112 (Question subsidiaire)**.** Déterminez les valeurs de $f : z \mapsto \frac{z+|z|}{2}$.

Solution ici : Section 2.36.

1.8 Programme 8 : Nombre complexes 2

1.8.1 Khôlle 37 : Complexes, Binôme

Exercise 1.113 (Question de cours)**.** Comment fonctionne l'intégration par partie ?

Exercise 1.114 (Problème principal)**.** Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

Exercise 1.115 (Question subsidiaire)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.37.

1.8.2 Khôlle 38 : Complexe, Géométrie plane

Exercise 1.116 (Question de cours)**.** Expliquez-moi le principe de changement de variables.

Exercise 1.117 (Problème principal)**.** [Théorème de Napoléon] Soit un triangle ABC quelconque. Soient A', B' et C' trois points tels que CBA', ACB' et BAC' soient équilatéraux (extérieurs à ABC). Soient D, E et F les centres de CBA', ACB' et BAC'. Montrez que DEF est un triangle équilatéral. Montrez que le centre de DEF est aussi celui de ABC. Faire de même en construisant les triangles équilatéraux intérieurs (noté $AB\tilde{C}$, $BC\tilde{A}$ et $CA\tilde{B}$ de centres $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$), puis comparer les aires de DEF et de $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$.

Exercise 1.118 (Question subsidiaire)**.** Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Solution ici : Section 2.38.

1.8.3 Khôlle 39 : Exponentielle complexe

Exercise 1.119 (Question de cours)**.** Énoncez le théorème d'existence de primitive et montrez que deux primitives égales en point sont égales.

Exercise 1.120 (Problème principal)**.** (ESSIM '93) On définit sinh, cosh et tanh sur $\mathbb{C}$ par les mêmes formules que sur $\mathbb{R}$. Donnez l'ensemble de définition de tanh. Résoudre $\tanh z = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\tanh z| < 1$. En déduire que tanh réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Exercise 1.121 (Question subsidiaire)**.** Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $w = \frac{1+z}{1-z}$. Quel est l'ensemble des points d'affixe z lorsque $|w| = 1$? Lorsque $|w| = 2$? $w \in \mathbb{R}$? $w \in i\mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.39.

1.8.4 Khôlle 40 : Complexes, Suite récurrente

Exercise 1.122 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la linéarité de l'intégrale.

Exercise 1.123 (Problème principal)**.** On définit la suite $(z_n)_n$ par récurrence : $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ fixés et $z_{n+1} - z_n = \alpha(z_n - z_{n-1})$. Déterminez une CNS sur $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $(z_n)_n$ soit périodique.

Exercise 1.124 (Question subsidiaire)**.** On pose la relation binaire sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$: $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R}, z' = \frac{z\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta - z\sin\theta}$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution ici : Section 2.40.

1.8.5 Khôlle 41 : Complexes, Racines n-ième

Exercise 1.125 (Question de cours)**.** Quelles sont les primitives usuelles ?

Exercise 1.126 (Problème principal)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{C}$. Donnez une CNS pour que les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$ soient toutes réelles.

Exercise 1.127 (Question subsidiaire)**.** Décomposez le polynôme $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1$ en produit de 3 polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Solution ici : Section 2.41.

1.8.6 Khôlle 42 : Complexes, Géométrie plane

Exercise 1.128 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la positivité de l'intégrale.

Exercise 1.129 (Problème principal)**.** [Construction du pentagone régulier] Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Déterminez une équation (du second degré) de solutions a et b, puis calculez $\cos {}^{2\pi}\!/_{5}$, $\cos {}^{4\pi}\!/_{5}$, $\cos {}^{\pi}\!/_{5}$ (idem sin).

Le cercle de centre Ω d'affixe $-{}^{1}\!/_{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe l'axe des abscisses en deux points I et J. Montrer que $x_I + x_J = x_I \times x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier usuel.

On appelle $ABCDE$ ce pentagone. La diagonale $[AC]$ est recoupée par les diagonales $[BD]$ et $[BE]$ en F et G. Calculez $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Exercise 1.130 (Question subsidiaire)**.** [Construction de Dürer] Que pensez-vous de la méthode de Dürer (on montrera qu'elle construit un pentagone *presque régulier*, avec une erreur de ${}^{4}\!/_{1000}$) :

Placer A et B ; tracer les cercles $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, |AB|)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(B, |AB|)$, d'intersection F et G ; tracer $\mathcal{C}(G, |AG|)$ qui coupe $\mathcal{C}_1$ en I et (FG) en K ; (IK) coupe $\mathcal{C}_2$ en C ; puis on clôt le pentagone.

Solution ici : Section 2.42.

1.9 Programme 9 : Équations différentielles, Intégration

1.9.1 Khôlle 43 : Sommes via une suite d'intégrales

Exercise 1.131 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercise 1.132 (Problème principal)**.** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

Calculez $I_0(= {}^{\pi}/_{4})$ et $I_1(= {}^{\ln 2}/_{2})$ puis trouvez une récurrence d'ordre 2 pour I_n. En déduire I_n et sa limite.

En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (c'est $\ln 2$) et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (c'est $\frac{\pi}{4}$).

Exercise 1.133 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe au plus une application $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que (puis appliquez avec $f = \cos$) :

$$\forall x, g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

Solution ici : Section 2.43.

1.9.2 Khôlle 44 : Fonction définie par une intégrale

Exercise 1.134 (Question de cours)**.** Parlez-moi du principe de superposition.

Exercise 1.135 (Problème principal)**.** Soit $\varphi(t) = \frac{\sinh t}{t}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = 1$. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrez que f est bien définie, donnez sa parité. Montrez qu'elle est dérivable et calculez sa dérivée. Dressez son tableau de variations.

Exercise 1.136 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, résolvez :

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases} \qquad \text{(avec conditions de Cauchy en 0)}$$

Solution ici : Section 2.44.

1.9.3 Khôlle 45 : Inégalité de Young généralisée

Exercise 1.137 (Question de cours)**.** Pourquoi est-ce que deux courbes intégrales (réelles) issues d'une même équation d'ordre 1 ne peuvent pas se croiser ? Pourquoi est-ce ces courbes intégrales recouvrent le plan ?

Exercise 1.138 (Problème principal)**.** Soit f une fonction définie sur $[0, a]$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ continue strictement croissante, dérivable et dont la dérivée et continue avec $f(0) = 0$. On note f^{-1} sa réciproque.

Montrez que, pour $x \in [0, a]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$. **Faites un dessin !**

Soit u, v tels que $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq f(a)$. Montrez que $uv \leq \int_0^u f + \int_0^v f^{-1}$

Exercise 1.139 (Question subsidiaire)**.** Montrez l'inégalité de Young : $\forall (p,q) \in]1, +\infty[, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

Solution ici : Section 2.45.

1.9.4 Khôlle 46 : Primitive de $\ln^n$, Règles de Biot

Exercise 1.140 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ?

Exercise 1.141 (Problème principal)**.** Déterminez $\int \ln^n \left(= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}\right)$.

Exercise 1.142 (Question subsidiaire)**.** [Règle de Biot] Observer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \, \mathrm{d}t$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\mathrm{d}t (= \frac{\pi}{8} \ln 2)$.

Solution ici : Section 2.46.

1.9.5 Khôlle 47 : Intégrale d'une fraction trigonométrique

Exercise 1.143 (Question de cours)**.** Décrivez la méthode de variation de la constante.

Exercise 1.144 (Problème principal)**.** Déterminez $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ $(I = J = \frac{\pi}{4})$. En déduire la valeur de $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} (= \frac{\pi}{4})$.

Exercise 1.145 (Question subsidiaire)**.** Montrez que :

$$\left(\forall(\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 0\right) \Rightarrow (\forall x \in [a, b], f(x) = 0)$$

Solution ici : Section 2.47.

1.9.6 Khôlle 48 : Intégrale à 4 paramètres

Exercise 1.146 (Question de cours)**.** Comment procéder avec une équation différentielle du premier ordre $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où $a(x)$ s'annule.

Exercise 1.147 (Problème principal)**.** Déterminez $I_{p,q}(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta (t - \alpha)^p (t - \beta)^q \mathrm{d}t \left(= \frac{(-1)^q (\beta - \alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}\right)$.

Exercise 1.148 (Question subsidiaire)**.** Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrez que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de période T.

Solution ici : Section 2.48.

1.10 Programme 10 : Algèbre générale (Groupes, Anneaux...)

1.10.1 Khôlle 49 : Action de groupe

Exercise 1.149 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exercise 1.150 (Problème principal)**.** Soir G un groupe. Soit X un ensemble et $\varphi : G \times X \to X$ qui vérifie : $\forall x \in X,\ \varphi(e,x) = x$ et $\forall g,h \in G, \forall x \in X,\ \varphi(g, \varphi(h,x)) = \varphi(g \star h, x)$.

On note $\sim_G$ la relation binaire sur X : $\exists g \in G, y = \varphi(g,x)$. Montrez que $\sim_G$ est une relation d'équivalence.

Exercise 1.151 (Question subsidiaire)**.** Soit g une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. Montrez que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Conclure en résolvant l'équation.

Solution ici : Section 2.49.

1.10.2 Khôlle 50 : Sous-groupe distingué

Exercise 1.152 (Question de cours)**.** Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupe. Montrez que Ker φ et Im φ sont des groupes.

Exercise 1.153 (Problème principal)**.** Soit G un groupe et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrez que Ker φ est distingué dans G (c'est-à-dire que $\forall x \in G,\ xHx^{-1} \subseteq H$).

Exercise 1.154 (Question subsidiaire)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Solution ici : Section 2.50.

1.10.3 Khôlle 51 : Moyenne harmonique

Exercise 1.155 (Question de cours)**.** Comment caractérisez l'injectivité l'injectivité d'un morphisme de groupe ?

Exercise 1.156 (Problème principal)**.** Sur $]-1,1[$, on définit une loi $\star$ par $\forall (x,y) \in]-1,1[, x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$

Montrez que $(]-1,1[, \star)$ est un groupe abélien.

Que pensez-vous des autres moyennes ?

Exercise 1.157 (Question subsidiaire)**.** Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrez que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de période T.

Solution ici : Section 2.51.

1.10.4 Khôlle 52 : Avant l'addition

Exercise 1.158 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exercise 1.159 (Problème principal)**.** On sait que $3+3+3+3+3 = 3\times 5$ et $3\times 3\times 3\times 3\times 3 = 3^5$. On dit que la multiplication est l'opération itérée de l'addition, et que la puissance est l'opération itérée de la multiplication.

Définissez et étudiez l'opération dont l'addition est l'opération itérée (oui, elle existe !).

Exercise 1.160 (Question subsidiaire)**.** Soit (E) une équation différentielle homogène linéaire du 2^{nd} ordre (pas à coefficients constant) dont on connaît une solution y_0 qui ne s'annule pas. On pose $z : y(x) = z(x)y_0(x)$. Résolvez (E).

Solution ici : Section 2.52.

1.10.5 Khôlle 53 : Partition en deux copies d'un sous-groupe

Exercise 1.161 (Question de cours)**.** Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupe. Montrez que Ker φ et Im φ sont des groupes.

Exercise 1.162 (Problème principal)**.** Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G (c'est-à-dire que $\forall x \in G,\ xHx^{-1} \subseteq H$).

Exercise 1.163 (Question subsidiaire)**.** Soit q une fonction $\mathcal{C}^1$ tels que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrez que les solutions de $y'' + q(x)y = 0$ sont bornées au voisinage de $+\infty$. (On pourra considérer $z : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y^2(x) + \frac{y'(x)^2}{q(x)}$).

Solution ici : Section 2.53.

1.10.6 Khôlle 54 : Loi exponentielle

Exercise 1.164 (Question de cours)**.** Comment caractérisez l'injectivité l'injectivité d'un morphisme de groupe ?

Exercise 1.165 (Problème principal)**.** Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $\star$ par :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, (x,y)\star(x',y') = \left(x+x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrez que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe non abélien. Trouvez les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.166 (Question subsidiaire)**.** On considère l'équation $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle on admet le théorème suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé *solution maximale* tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement (qui reste solution) à un intervalle qui contient strictement I.

Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

Solution ici : Section 2.54.

1.11 Programme 11 : Structures, Topologie réelle

1.11.1 Khôlle 55 : Groupe 2-couvrant, Densité par la moyenne

Exercise 1.167 (Question de cours)**.** Parlez-moi des inégalités triangulaires.

Exercise 1.168 (Problème principal)**.** Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G.

Exercise 1.169 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in A, a < x < b$ et $\forall a, b \in A$, $\frac{a+b}{2} \in A$. Montrez que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.55.

1.11.2 Khôlle 56 : Morphisme de corps

Exercise 1.170 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un corps ?

Exercise 1.171 (Problème principal)**.** Montrez que le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal ($I \subset k$ est un idéal si et seulement si $(I, +)$ est un groupe et $\forall \alpha \in k, \forall x \in I, \alpha x \in I$).

Montrez que les seuls idéaux d'un corps sont l'idéal nul et le corps lui-même.

En déduire qu'un morphisme de corps (non nul) est injectif, puis que si $\sigma : k \to K$ est un tel morphisme, alors k est isomorphe à un sous-corps de K.

Exercise 1.172 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.56.

1.11.3 Khôlle 57 : Loi exponentielle, Irrationalité de e

Exercise 1.173 (Question de cours)**.** Parlez-moi des intervalles.

Exercise 1.174 (Problème principal)**.** Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $\star$ par :

$$\forall((x, y), (x', y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, (x, y) \star (x', y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrez que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe non abélien. Trouvez les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.175 (Question subsidiaire)**.** On va montrer l'irrationalité de e. Montrez que $\forall n, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$, puis $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

Solution ici : Section 2.57.

1.11.4 Khôlle 58 : Abélianisation, Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$?

Exercise 1.176 (Question de cours)**.** Montrez que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 1.177 (Problème principal)**.** Soit G un groupe, on note le *commutateur* de $a, b \in G$, $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ et le groupe dérivé DG, le groupe qui est engendré par $\{[a,b]; a, b \in G\}$. Montrez que DG est distingué dans G.

Montrez que $H := \{gDG; g \in G\}$ peut être muni d'une structure de groupe (avec $(g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1g_2)DG$), et que ce groupe est commutatif (on prendra le temps de vérifier que c'est un groupe et que l'opération $\star$ est bien définie).

Exercise 1.178 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ est non-vide, bornée, mais n'admet pas de borne supérieure. (Introduire $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$.)

Solution ici : Section 2.58.

1.11.5 Khôlle 59 : Sous-corps dense dans $\mathbb{R}$, Lemme de Cousin

Exercise 1.179 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un anneau ?

Exercise 1.180 (Problème principal)**.** Montrez que $\left\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps commutatif.

Exercise 1.181 (Question subsidiaire)**.** [Lemme de Cousin] Soit $[a,b]$ un segment réel et δ une fonction strictement positive (appelée **jauge**) sur ce segment. Montrez qu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ telle que :

$$\forall i \leq n, \exists t_i \in [x_{i-1}, x_i], x_i - x_{i-1} \leq \delta(t_i)$$

On pourra poser $C = \{y \in [a,b]; [a,y] \text{ possède une subdivision}\}$.

Solution ici : Section 2.59.

1.11.6 Khôlle 60 : Automorphismes intérieurs

Exercise 1.182 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la borne supérieure (et inférieure).

Exercise 1.183 (Problème principal)**.** Soit G un groupe. Soit $\sim$ la relation sur G définit par : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = gxg^{-1}$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence. Montrez que cette relation est trivial pour un groupe commutatif.

Soit $\iota_g : G \to G$ l'application $x \mapsto gxg^{-1}$. Justifier l'appellation *automorphisme* "intérieur". Montrez que $\iota_g \circ \iota_h = \iota_{gh}$ et $\iota_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, donc $\iota_g^{-1} = \iota_{g^{-1}}$. En déduire que $\iota : g \mapsto \iota_g$ est un morphisme de groupe, de G vers $\mathrm{Aut}(G)$, le groupe des automorphismes de G. Pour $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, montrez que $\phi \circ \iota_g \circ \phi = \iota_{\phi(g)}$ et en déduire que $\mathrm{Im}\iota$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercise 1.184 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x-a|; a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Solution ici : Section 2.60.

1.12 Programme 12 : Suites, Topologie réelle

1.12.1 Khôlle 61 : Densité de la différence de deux suites

Exercise 1.185 (Question de cours)**.** Quelles sont les limites possibles pour une suite de réels strictement croissante.

Exercise 1.186 (Problème principal)**.** Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m ; (p, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n) ; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercise 1.187 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x - a| ; a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Solution ici : Section 2.61.

1.12.2 Khôlle 62 : Piles de cartes

Exercise 1.188 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des gendarmes.

Exercise 1.189 (Problème principal)**.** J'ai un paquet infini de carte. Je pose la première carte au bord de la table de sorte que son centre de gravité soit parfaitement sur la frontière de la table (la moitié de la carte est sur la table, l'autre au-dessus du vide). Je pose une autre carte dessus de sorte qu'elle dépasse au dessus du vide et que la pile soit à la limite de tomber (le centre de gravité de la pile est à la frontière de la table), puis une troisième, etc. Est-ce que le point de la pile de carte le plus éloigné du bord de la table peut se trouver arbitrairement loin ?

Exercise 1.190 (Question subsidiaire)**.** Montrez qu'une suite de Cauchy converge et qu'une suite convergente et de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

Solution ici : Section 2.62.

1.12.3 Khôlle 63 : Variation de la constante pour les suites

Exercise 1.191 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercise 1.192 (Problème principal)**.** On considère $(u_n)_n$ qui vérifie $u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$ (et u_0 fixé). Montrez que $(v_n)_n$ vérifiant $v_{n+1} - (n+1)v_n = 0$ et $v_0 = C$ vaut $v_n = Cn!$. Trouvez une condition sur $C(n)$ telle que $u_n = C(n)n!$ et résoudre.

Procédez de même pour $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

Exercise 1.193 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} (\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sin n\alpha|)$.

Solution ici : Section 2.63.

1.12.4 Khôlle 64 : Moyenne arithmético-géométrique

Exercise 1.194 (Question de cours)**.** Parlez-moi des suites récurrences d'ordre 2.

Exercise 1.195 (Problème principal)**.** Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par $u_0 = x$ et $v_0 = y$ puis :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

Montrez que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Ont appelle $M(x, y)$ cette limite (moyenne arithmético-géométrique). Montrez que M est symétrique, homogène de degré 1 ($M(tx, ty) = tM(x, y)$) et que le cas d'égalité de $\min(x, y) \leq \sqrt{xy} \leq M(x, y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x, y)$ est seulement $x = y$.

Pour la culture, on peut montrer que $\frac{\pi/2}{M(x,y)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y \sin^2 t}}$.

Exercise 1.196 (Question subsidiaire)**.** On va montrer l'irrationalité de e. Montrez que $\forall n, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$, puis $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

Solution ici : Section 2.64.

1.12.5 Khôlle 65 : Théorème de Beatty

Exercise 1.197 (Question de cours)**.** Définissez les notations de Landau.

Exercise 1.198 (Problème principal)**.** [Théorème de Beatty] On note $A(x) = \{\lfloor nx \rfloor ; n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $(A(x), A(y))$ est un partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ et $x, y \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 1.199 (Question subsidiaire)**.** Soit $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifiant que $\forall n, (1-u_n)u_{n+1} > 1/4$. Montrez que $u_n \to 1/2$ quand $n \to +\infty$.

Solution ici : Section 2.65.

1.12.6 Khôlle 66 : Césaro multiplicatif

Exercise 1.200 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème des segments emboîtés.

Exercise 1.201 (Problème principal)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrez que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ converge aussi vers ℓ. Étudiez la réciproque.

Appliquez avec les suites $(u_n)_n \in \left\{ \left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \right)_n ; \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right)_n ; \left(\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \right)_n \right\}$.

Exercise 1.202 (Question subsidiaire)**.** Trouvez un exemple de suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, (u_{kn})_n$ est convergente.

Solution ici : Section 2.66.

1.13 Programme 13 : Espaces vectoriels 1, Suites

1.13.1 Khôlle 67 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Exercise 1.203 (Question de cours)**.** Donnez les axiomes des espaces vectoriels. Montrez que la commutativité de $+$ découle de ceux-ci.

Exercise 1.204 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Exercise 1.205 (Question subsidiaire)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ avec $u_1 = 1$ qui vérifie que pour tout n, $2u_n$ est inférieur à au moins la moitié des termes $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Montrez que $u_n \to 0$.

Solution ici : Section 2.67.

1.13.2 Khôlle 68 : Sous-espace engendré

Exercise 1.206 (Question de cours)**.** Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. Parlez-moi de $F \cap G$ et $F \cup G$ (on montrera que $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exercise 1.207 (Problème principal)**.** Montrer que $a = (1,2,3)$ et $b = (2,-1,1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1,0,1)$ et $d = (0,1,1)$.

Exercise 1.208 (Question subsidiaire)**.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Soit $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$. Montrez que u_n et v_n sont adjacentes avec comme limite commune $b \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Solution ici : Section 2.68.

1.13.3 Khôlle 69 : Évaluation des polynômes

Exercise 1.209 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'une somme directe, que sont des espaces supplémentaires ?

Exercise 1.210 (Problème principal)**.** Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. En combien de points faut-il évaluer un polynôme de degré n pour le déterminer entièrement ?

Exercise 1.211 (Question subsidiaire)**.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles positives avec $u_n \sim v_n$. Soient $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Montrez que si $V_n \to +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.

Qu'en est-il des autres notations de Landau ? (Montrez que $U_n = o(V_n)$ si $u_n = o(v_n)$ et $U_n \to +\infty$, alors $U_n = o(V_n)$ et idem pour O, attention, ici $U_n \to +\infty$, pensez à trouver des exemples dans les autres cas.)

Solution ici : Section 2.69.

1.13.4 Khôlle 70 : Combinaison linéaire

Exercise 1.212 (Question de cours)**.** Donnez les axiomes des espaces vectoriels. Montrez que la commutativité de + découle de ceux-ci.

Exercise 1.213 (Problème principal)**.** Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercise 1.214 (Question subsidiaire)**.** Soit une suite $(u_n)_n$, on définit $(v_n)_n$ par : $v_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n)$. Montrez que si $(u_n)_n$ converge, alors $(v_n)_n$ aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

Solution ici : Section 2.70.

1.13.5 Khôlle 71 : Espace engendré par un cône

Exercise 1.215 (Question de cours)**.** Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. Parlez-moi de $F \cap G$ et $F \cup G$ (on montrera que $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exercise 1.216 (Problème principal)**.** Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$. C est-il un espace vectoriel pour les opérations usuelles ? Montrez que $V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); \exists (g, h) \in C^2, f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercise 1.217 (Question subsidiaire)**.** Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies par $u_0 = x$, $v_0 = y$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{1}{v_{n+1}} & = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \end{cases}$$

Montrez que u_n et v_n sont adjacente et convergent vers une limite commune $\sqrt{xy}$.

Solution ici : Section 2.71.

1.13.6 Khôlle 72 : Ensemble milieu

Exercise 1.218 (Question de cours)**.** Parlez-moi des combinaisons linéaires.

Exercise 1.219 (Problème principal)**.** Dans le plan, on se donne n points $A_1, ..., A_n$. Existe-t-il n points $M_1, ..., M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$?

Exercise 1.220 (Question subsidiaire)**.** Soit une suite $(v_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $v_n + v_{2n} = o\left(1/n\right)$. Montrez que $v_n = o\left(1/n\right)$ en montrant d'abord que :

$$\forall p, n, \ |v_n| \leq |v_{2^{p+1}n}| + \sum_{k=0}^{p} |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}|$$

Solution ici : Section 2.72.

1.14 Programme 14 : Espaces vectoriels 2

1.14.1 Khôlle 73 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Exercise 1.221 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la méthode du pivot.

Exercise 1.222 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Exercise 1.223 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \left\{ f \in E \ ; \ \int_0^1 f = 0 \right\}$ pour $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrez que F est un sous-espace et donnez-en un supplémentaire.

Solution ici : Section 2.73.

1.14.2 Khôlle 74 : Familles libres et liées

Exercise 1.224 (Question de cours)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est liée. Montrez que u est une homothétie.

Exercise 1.225 (Problème principal)**.** Étudiez la liberté des familles suivantes :

- $((2, i, 4, -i); (i, -1, -i, 1); (0, 3, -i, 1))$
- (f_a, f_b, f_c) où $f_u : x \mapsto \sin(x + u)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $f_n : x \mapsto nx + n^2 + 1$.

Exercise 1.226 (Question subsidiaire)**.** Soit F un sous-espace de E, et $v, w \in E$. Montrez que :

$$F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w \Leftrightarrow \exists u \in F, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha\beta \neq 0 \text{ et } u + \alpha v + \beta w = 0$$

Solution ici : Section 2.74.

1.14.3 Khôlle 75 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Exercise 1.227 (Question de cours)**.** Parlez-moi des isomorphismes.

Exercise 1.228 (Problème principal)**.** Soient $a, b, c \in [0,1]^3$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2. Montrez l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$$

Déterminez explicitement ces réels en fonction de a, b, c.

Exercise 1.229 (Question subsidiaire)**.** Soient f et g deux formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Montrez que : $f \times g = 0 \Leftrightarrow g = 0$ ou $f = 0$.

Solution ici : Section 2.75.

1.14.4 Khôlle 76 : Ensemble milieu

Exercise 1.230 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la méthode du pivot.

Exercise 1.231 (Problème principal)**.** Dans le plan, on se donne n points $A_1, ..., A_n$. Existe-t-il n points $M_1, ..., M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$?

Exercise 1.232 (Question subsidiaire)**.** Montrez que p est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.

Solution ici : Section 2.76.

1.14.5 Khôlle 77 : Stabilité et commutation

Exercise 1.233 (Question de cours)**.** Parlez-moi des espaces supplémentaires.

Exercise 1.234 (Problème principal)**.** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que si f et g commutent, alors Ker g et Im g sont stables par f. Réciproquement, montrez que si g **est un projecteur** et que Ker g et Im g sont stables par f, alors f et g commutent.

Exercise 1.235 (Question subsidiaire)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On définit :

$$\varphi : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x t f(t) \mathrm{d}t \right)$$

Montrez que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Solution ici : Section 2.77.

1.14.6 Khôlle 78 : Une équation différentielle d'ordre n

Exercise 1.236 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'injectivité des applications linéaires.

Exercise 1.237 (Problème principal)**.** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $U : f \mapsto f' - 2xf$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez Ker U^n.

Exercise 1.238 (Question subsidiaire)**.** Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrez que $F' \oplus G = E$.

Solution ici : Section 2.78.

1.15 Programme 15 : Espaces vectoriels 3, Continuité

1.15.1 Khôlle 79 : Fonction vectorielle de Leibnitz

Exercise 1.239 (Question de cours)**.** Parlez-moi des limites monotones.

Exercise 1.240 (Problème principal)**.** [Fonction vectorielle de Leibnitz] Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$ d'un espace vectoriel E. On construit $f : E \to E$ définie par $f(M) = \sum_i a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_i a_i(A_i - M)$. On pose G le barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, c'est-à-dire l'unique (?) point tel que $\sum_i a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Montrez que $f(M) = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{MG}$. En déduire les coordonnées de G dans le repère de centre O. (Donnez une représentation matricielle de ce résultat.)

Que se passe-t-il si $\sum_i a_i = 0$?

Exercise 1.241 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que Ker f, Ker $(f - Id)$ et Ker $(f + Id)$ sont en somme directe.

Solution ici : Section 2.79.

1.15.2 Khôlle 80 : Encodage de la Grassmannienne

Exercise 1.242 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la limite d'une composée.

Exercise 1.243 (Problème principal)**.** Soient E un espace vectoriel et $(v_1, ..., v_n)$ une famille de vecteurs. On construit $\pi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ par : $\pi(i) = \min\{j \,;\, v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i+1}, ..., v_j)\}$ où les indices sont entendus modulo n. Si $v_i \notin \mathrm{Vect}(v_k)_{k \neq i}$, alors $\pi(i) = i$, si $v_i = \vec{0}$, alors $\pi(i) = i$. Montrez que π est bijective.

Exercise 1.244 (Question subsidiaire)**.** Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrez que $F' \oplus G = E$.

Solution ici : Section 2.80.

1.15.3 Khôlle 81 : Fonctions affines

Exercise 1.245 (Question de cours)**.** Montrez que : une fonction strictement monotone est injective ; une fonction continue injective est strictement monotone.

Exercise 1.246 (Problème principal)**.** On définit une transformation affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par $\forall \lambda_i, x_i,\ \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i f(x_i)$.

Montrez que f est une transformation affine si et seulement si $L : x \mapsto f(x) - f(\vec{0})$ est une fonction linéaire

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une transformation affine si et seulement si $\forall x, y \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$.

Exercise 1.247 (Question subsidiaire)**.** Soit F un sous-espace de E, et $v, w \in E$. Montrez que :

$$F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w \Leftrightarrow \exists u \in F, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha\beta \neq 0 \text{ et } u + \alpha v + \beta w = 0$$

Solution ici : Section 2.81.

1.15.4 Khôlle 82 : Familles libres et liées

Exercise 1.248 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercise 1.249 (Problème principal)**.** Étudiez la liberté des familles suivantes :

- $((2, i, 4, -i); (i, -1, -i, 1); (0, 3, -i, 1))$
- (f_a, f_b, f_c) où $f_u : x \mapsto \sin(x+u)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $f_n x \mapsto nx + n^2 + 1$.

Exercise 1.250 (Question subsidiaire)**.** Soient f et g deux formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Montrez que : $f \times g = 0 \Leftrightarrow g = 0$ ou $f = 0$.

Solution ici : Section 2.82.

1.15.5 Khôlle 83 : Matroïdes

Exercise 1.251 (Question de cours)**.** Parlez-moi de réciproque d'une fonction continue.

Exercise 1.252 (Problème principal)**.** [Matroïdes] On se donne n vecteurs : $(v_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^d$. On construit $\mathcal{I} = \{E \subset [1, n]; (v_i)_{i\in E}$ est libre$\}$. Montré que $\mathcal{I}$ est un matroïde, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} & \emptyset \in \mathcal{I} \\ \forall X \in \mathcal{I}, & Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathcal{I} \\ \forall X, Y \in \mathcal{I}, & |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \backslash X,\ X \cup \{e\} \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Exercise 1.253 (Question subsidiaire)**.** Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. En combien de points faut-il évaluer un polynôme de degré n pour le déterminer entièrement ?

Solution ici : Section 2.83.

1.15.6 Khôlle 84 : Semi-inverse des applications linéaires injectives

Exercise 1.254 (Question de cours)**.** Montrez qu'une fonction qui admet une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

Exercise 1.255 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que : Ker $v \subset$ Ker $u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), u = w \circ v$. En déduire que : v injectif $\Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), w \circ v = Id_E$

Exercise 1.256 (Question subsidiaire)**.** Montrez que p est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.

Solution ici : Section 2.84.

1.16 Programme 16 : Continuité, Développements limités

1.16.1 Khôlle 85 : Comparaison avec une fonction non-explicite

Exercise 1.257 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'image d'un segment par une fonction continue.

Exercise 1.258 (Problème principal)**.** Comparez au voisinage de $+\infty$: e^{x^2} avec $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercise 1.259 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires et injective. Montrez que f est continue.

Même question pour g possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall r \in \mathbb{Q}, X_r = g^{-1}(\{r\})$ est fermée (c'est-à-dire que toute suite convergente de points de X_r a sa limite dans X_r).

Solution ici : Section 2.85.

1.16.2 Khôlle 86 : Développement d'un raccord de fonction

Exercise 1.260 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercise 1.261 (Problème principal)**.** Soit f la fonction définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \cosh\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f a-t-elle un développement limité en 0, si oui lequel (ordre n) ?

Exercise 1.262 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que f soit croissante mais $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrez que f est continue.

Solution ici : Section 2.86.

1.16.3 Khôlle 87 : Développement d'une intégrale

Exercise 1.263 (Question de cours)**.** Parlez-moi des limites à droite et à gauche et de l'unicité de la limite.

Exercise 1.264 (Problème principal)**.** Donnez un développement à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercise 1.265 (Question subsidiaire)**.** Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$, f, g continues et g croissante. On suppose que f et g commutent. Montrez qu'elles ont un point fixe commun.

Solution ici : Section 2.87.

1.16.4 Khôlle 88 : Développement d'une réciproque

Exercise 1.266 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la continuité d'une composée.

Exercise 1.267 (Problème principal)**.** On pose $f : x \mapsto 2\tan x - x$. Montrez que f admet une réciproque impaire sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculez le développement de f^{-1} à l'ordre 6.

Exercise 1.268 (Question subsidiaire)**.** Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues qui commutent. On veut montrer qu'il existe un point commun : $\exists x, f(x) = g(x)$.

a) Par l'absurde : montrez qu'en l'absence de point commun, on peut supposer $f > g$, puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$ puis $\forall x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$ et concluez.

b) Par les points fixes : on pose X l'ensemble des points fixes de f, montrez qu'il n'est pas vide, qu'il admet un minimum x_m et un maximum x_M et concluez en comparant f et g en x_m et x_M.

Solution ici : Section 2.88.

1.16.5 Khôlle 89 : Approximant de Padé

Exercise 1.269 (Question de cours)**.** Pourquoi est-ce qu'une fonction monotone qui transforme un intervalle en un intervalle est continue ?

Exercise 1.270 (Problème principal)**.** Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement de $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit du plus grand degré possible.

Exercise 1.271 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $K = [c,d] \subset f(I)$. Montrez qu'il existe $L \subset I$ un segment tel que $f(L) = K$.

Solution ici : Section 2.89.

1.16.6 Khôlle 90 : Équation différentielle

Exercise 1.272 (Question de cours)**.** Quel est le rapport entre le prolongement d'une fonction et son développement limité ?

Exercise 1.273 (Problème principal)**.** Soit $(E) : 2xy'' - y' + x^2 y = 0$. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) possédant un développement limité à tout ordre. Trouvez f. En déduire le changement de variable adéquat et résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_-$ puis $\mathbb{R}_+$ et enfin $\mathbb{R}$.

Exercise 1.274 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Soit $B \subset A$ une partie dense de A. Montrez que $f(B)$ est dense dans $f(A)$. En déduire que $\{\cos n ; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, +1]$.

Solution ici : Section 2.90.

1.17 Programme 17 : Polynômes, Développements limités

1.17.1 Khôlle 91 : Approximant de Padé

Exercise 1.275 (Question de cours)**.** Parlez-moi du degré des polynômes.

Exercise 1.276 (Problème principal)**.** [Règle de Worthington] Montrez que le développement de $\tan^{-1}$ à l'ordre 6 est $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$.

Montrez que le développement de $f : x \mapsto \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 6 est $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)$.

Application : Prenons un triangle rectangle dont le plus petit angle est A. Soit a le côté opposé à A, b le côté adjacent et c l'hypoténuse. Montrez que $A \simeq \frac{3a}{b+2c}$.

Exercise 1.277 (Question subsidiaire)**.** Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement de $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit du plus grand degré possible.

Exercise 1.278 (Question subsidiaire)**.** Étudiez de la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ avec $0 < a < b$ des réels fixés.

Solution ici : Section 2.91.

1.17.2 Khôlle 92 : Développement limité et combinatoire

Exercise 1.279 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercise 1.280 (Problème principal)**.** Calculez le développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Exercise 1.281 (Question subsidiaire)**.** Étudiez au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$. Existe-t-il une tangente ?

Solution ici : Section 2.92.

1.17.3 Khôlle 93 : Convergence de l'exponentielle

Exercise 1.282 (Question de cours)**.** Parlez-moi du lien entre les racines d'un polynôme P et le polynôme P'.

Exercise 1.283 (Problème principal)**.** Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donnez un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$. Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Exercise 1.284 (Question subsidiaire)**.** Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Solution ici : Section 2.93.

1.18 Programme 18 : Polynômes

1.18.1 Khôlle 94 : Stabilisation polynomiale du cercle

Exercise 1.285 (Question de cours)**.** Parlez-moi des familles de polynômes de degrés échelonnés.

Exercise 1.286 (Problème principal)**.** Résolvez $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$. Commencez par trouver des solutions évidentes, ainsi qu'une structure sur l'ensemble des solutions. Puis, résolvez en supposant que toute solution (de degré > 0) s'annule en 0. Enfin, montrez que $P(0) = 0$ en s'intéressant à $X^n P(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$.

Résolvez $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

Exercise 1.287 (Question subsidiaire)**.** Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrez que ψ est linéaire, calculez son noyau et $\psi(\mathbb{R}_n[X])$ pour tout n ($\subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut admettre l'inclusion réciproque). Calculez $dom(\psi(P))$ (le coefficient dominant) et $\deg \psi(P)$ en fonction de $dom(P)$ et $\deg P$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^r (\sim \frac{1}{r+1} n^{r+1})$.

Solution ici : Section 2.94.

1.18.2 Khôlle 95 : Lemme de Thom, Système complexe élémentaire

Exercise 1.288 (Question de cours)**.** Parlez-moi des polynômes premiers (surtout dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$).

Exercise 1.289 (Problème principal)**.** [Lemme de Thom] Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation et $(\varepsilon_P)_{P \in \mathcal{F}} \in \{-1, 0, +1\}^{\mathcal{F}}$ fixé. On note $E_P = \{x \in \mathbb{R}; P(x) \text{ est du signe de } \varepsilon_P\}$. Montrez que $E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P \in \mathcal{F}} E_P$ est un intervalle.

Exercise 1.290 (Question subsidiaire)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $x+y+z = a$ et $xyz = b$ et $|x| = |y| = |z|$. Appliquez avec $a = b = 1$.

Solution ici : Section 2.95.

1.18.3 Khôlle 96 : Croisement de Ghys, Inversion de matrice

Exercise 1.291 (Question de cours)**.** Parlez-moi des polynômes scindés.

Exercise 1.292 (Problème principal)**.** [Croisement de Ghys] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(0) = 0$. Montrez que si $val(P)$ est paire, alors P est du même signe à gauche et à droite de 0. Trouvez deux polynômes P et Q tels que $P < Q$ avant 0 et $P < Q$ après 0. Idem avec $P < Q$ avant et $P > Q$ après. Même question avec les 6 possibilités pour 3 polynômes. Pour 4 polynômes, montrez qu'il n'est pas possible que $P_4 < P_3 < P_2 < P_1$ avant 0 et $P_3 < P_1 < P_4 < P_2$ après.

Exercise 1.293 (Question subsidiaire)**.** Soit d fixé et deux familles de $d+1$ complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. On pose $f(X) = \sum_i f_i X^i$ et $h(X) = \sum_j h_j X^j$. Montrez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a > b$) : $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j \iff f(X) = h(X+1)$.

En déduire l'expression des h_j en fonction des f_i quand $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j$.

Solution ici : Section 2.96.

1.19 Programme 19 : Polynômes, Dérivation

1.19.1 Khôlle 97 : Équivalent de la série des puissances

Exercise 1.294 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème de Rolle.

Exercise 1.295 (Problème principal)**.** Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrez que ψ est linéaire, calculez son noyau et $\psi(\mathbb{R}_n[X])$ pour tout n ($\subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut admettre l'inclusion réciproque). Calculez $dom(\psi(P))$ (le coefficient dominant) et $\deg \psi(P)$ en fonction de $dom(P)$ et $\deg P$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^r (\sim \frac{1}{r+1} n^{r+1})$.

Exercise 1.296 (Question subsidiaire)**.** Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Soit $\Delta : x \mapsto (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x))$. Montrez que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculez sa dérivée. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Remarquez ce qui se passe quand $g : x \mapsto x$.

Solution ici : Section 2.97.

1.19.2 Khôlle 98 : Système complexe élémentaire, Suite contractée

Exercise 1.297 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'égalité et de l'inégalité des accroissements finis.

Exercise 1.298 (Problème principal)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $x+y+z = a$ et $xyz = b$ et $|x| = |y| = |z|$. Appliquez avec $a = b = 1$.

Exercise 1.299 (Question subsidiaire)**.** Soit f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution ici : Section 2.98.

1.19.3 Khôlle 99 : Inversion de matrice, Accroissements finis forts

Exercise 1.300 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la dérivée d'une composée et d'une réciproque.

Exercise 1.301 (Problème principal)**.** Soit d fixé et deux familles de $d+1$ complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. On pose $f(X) = \sum_i f_i X^i$ et $h(X) = \sum_j h_j X^j$. Montrez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a > b$) : $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j \iff f(X) = h(X+1)$.

En déduire l'expression des h_j en fonction des f_i quand $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j$.

Exercise 1.302 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{x\in[a,b]} f'(x)$. Montrez que f est affine.

Solution ici : Section 2.99.

1.20 Programme 20 : Polynômes, Dimension finie

1.20.1 Khôlle 100 : Méthode des trapèzes

Exercise 1.303 (Question de cours)**.** Parlez-moi des théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.

Exercise 1.304 (Problème principal)**.** Soit f une fonction $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ trois fois dérivable. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$$

(On trouvera le bon A pour utiliser la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$.) Donnez une interprétation géométrique lorsque f est vue comme une primitive de f'.

Exercise 1.305 (Question subsidiaire)**.** Soit f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution ici : Section 2.100.

1.20.2 Khôlle 101 : Critère d'Eisenstein

Exercise 1.306 (Question de cours)**.** Parlez-moi des polynômes de Lagrange.

Exercise 1.307 (Problème principal)**.** [Critère d'Eisenstein] On admet le lemme de Gauss : si $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il l'est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit p premier et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $a_n = 1$, p^2 ne divise pas a_0, mais $p|a_k$ pour $k \neq n$. Montrez que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que $X^2 + 15X + 10$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, puis que $H = X^2 + X + 2$ aussi (regarder $H(X+3)$), puis que $F = \frac{X^p - 1}{X-1}$ aussi (regardez $F(X+1)$) pour p premier.

Exercise 1.308 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Solution ici : Section 2.101.

1.20.3 Khôlle 102 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur

Exercise 1.309 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule de Grassmann.

Exercise 1.310 (Problème principal)**.** Soit f une fonction s'annulant n fois, en $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et n fois dérivable sur $[x_1, x_n]$. Soit $a \in [x_1, x_n]$. Montrez qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que : $f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{k=1}^n (a - x_k)$.

Exercise 1.311 (Question subsidiaire)**.** Déterminez les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ (aucun). Puis ceux tels que $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}[X]$). Puis ceux tels que $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}[X]$).

Solution ici : Section 2.102.

1.21 Programme 21 : Espaces à dimension finie, Fractions

1.21.1 Khôlle 103 : Centre du groupe des applications linéaires

Exercise 1.312 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème du rang.

Exercise 1.313 (Problème principal)**.** [Centre de $\mathscr{L}(E)$] Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrez que f est une homothétie.

On suppose que E est de dimension finie. Montrez que l'ensemble des applications linéaires qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des homothéties.

Exercise 1.314 (Question subsidiaire)**.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et la donner. Montrez que la famille des $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* avec : $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$.

Solution ici : Section 2.103.

1.21.2 Khôlle 104 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Exercise 1.315 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la décomposition en éléments simples.

Exercise 1.316 (Problème principal)**.** [Matroïdes] On se donne n vecteurs : $(v_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^d$. On construit $\mathcal{I} = \{E \subset [1,n]; (v_i)_{i\in E} \text{ est libre}\}$. Montrez que $\mathcal{I}$ est un matroïde, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} & \emptyset \in \mathcal{I} \\ \forall X \in \mathcal{I}, & Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathcal{I} \\ \forall X, Y \in \mathcal{I}, & |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \backslash X,\ X \cup \{e\} \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Exercise 1.317 (Question subsidiaire)**.** Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_0, u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de r vecteurs de rang s'. Montrez que $s' \geq r + s - n$.

Solution ici : Section 2.104.

1.21.3 Khôlle 105 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces

Exercise 1.318 (Question de cours)**.** Démontrez que $n+1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de n mêmes vecteurs forment une famille liée.

Exercise 1.319 (Problème principal)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps **infini** et **commutatif**. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrez que E ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de sous-espaces strictes.

Exercise 1.320 (Question subsidiaire)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x, \exists p_x, f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrez que f est nilpotente.

Solution ici : Section 2.105.

1.22 Programme 22 : Espaces à dimension finie, Matrices

1.22.1 Khôlle 106 : Base duale de $\mathbb{R}_n[X]$, L'autre produit

Exercise 1.321 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème du rang.

Exercise 1.322 (Problème principal)**.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et la donner. Montrez que la famille des $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* avec : $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$.

Exercise 1.323 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez BA $(= I_2)$.

Solution ici : Section 2.106.

1.22.2 Khôlle 107 : Rang d'une sous-famille, Base de projecteurs

Exercise 1.324 (Question de cours)**.** Parlez-moi des changements de base.

Exercise 1.325 (Problème principal)**.** Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_0, u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de r vecteurs de rang s'. Montrez que $s' \geq r + s - n$.

Exercise 1.326 (Question subsidiaire)**.** Soit E de dimension finie. On veut montrer que $\mathscr{L}(E)$ possède une base faite de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. À quelle condition l'endomorphisme associé à $M \in \mathcal{M}_n$ est-il un projecteur ? Montrez que les $E_{i,i}$ et les $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont associées à des projecteurs. Conclure.

Solution ici : Section 2.107.

1.22.3 Khôlle 108 : Application nilpotente, Carrés magiques

Exercise 1.327 (Question de cours)**.** Parlez-moi des différents sous-espaces classiques de $\mathcal{M}_n$ (triangulaires, diagonales, anti-symétriques, inversibles ?).

Exercise 1.328 (Problème principal)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x, \exists p_x, f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrez que f est nilpotente.

Exercise 1.329 (Question subsidiaire)**.** [Carrés magiques] Soit MG_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les sommes sur toutes les lignes, les colonnes et les deux diagonales sont égales. Montrez que MG_n est un espace vectoriel. Calculez la dimension de MG_n, en utilisant $\phi : MG_n \to \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, l'application qui a M associe $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, ..., m_{n-1,n-2})$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} & & & & m_{1,n} \\ & & M_1 & & \vdots \\ & & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Solution ici : Section 2.108.

1.23 Programme 23 : Matrices, Espaces à dimension finie

1.23.1 Khôlle 109 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan de matrices

Exercise 1.330 (Question de cours)**.** Parlez-moi du rang d'une matrice.

Exercise 1.331 (Problème principal)**.** [Groupe d'Heisenberg] Pour un anneau A, on construit $H_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in A \right\}$. On notera $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par (a, b, c). En supposant $(A, +)$ commutatif, montrez que $H_3(A)$ est un groupe multiplicatif avec $(a, b, c) * (a', b,', c') = (a+a', b+b', c+c'+ab')$, puis déterminez $(a, b, c)^{-1}$ et $(a, b, c)^n$. Pour $x, y \in H_3(A)$, calculez $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. En déduire le centre $Z(H_3(A)) = \{x \in H_3(A) \ ; \ \forall y \in H_3(A), \ xy = yx\}$, et le groupe dérivé $DG(H_3(A)) = \langle \ [x, y] \ ; \ x, y \in H_3(A) \ \rangle$. À quelle condition $H_3(A)$ est-il abélien ? Montrez que $H_3(\mathbb{Z})$ est engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercise 1.332 (Question subsidiaire)**.** Pour $n \geq 2$, montrez que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution ici : Section 2.109.

1.23.2 Khôlle 110 : Théorème de Hadamard, Inversion d'une matrice

Exercise 1.333 (Question de cours)**.** Parlez-moi du pivot de Gauss dans $\mathcal{M}_{m,n}$.

Exercise 1.334 (Problème principal)**.** [Théorème de Hadamard] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrez que si $\forall i, \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible.

Exercise 1.335 (Question subsidiaire)**.** Soit d fixé et deux familles de d complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. Prouvez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a < b$) : $\forall i, f_i = \sum_{j=1}^{d} \binom{i}{j} h_j \ \Leftrightarrow \ \forall j, h_j = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i$.

Solution ici : Section 2.110.

1.23.3 Khôlle 111 : Transposition de solution, Matrices vampires

Exercise 1.336 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'algèbre des matrices et de son lien avec $\mathscr{L}(E, F)$.

Exercise 1.337 (Problème principal)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $Ax = b$ a une solution si et seulement si : $\forall y \in \mathbb{R}^m, \ y^T A = \vec{0}^T \Rightarrow y^T b = 0$.

Exercise 1.338 (Question subsidiaire)**.** [Matrices vampires] Commencer par calculer $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2$. Prouver que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\left([\![0, 9]\!] \right)$ vérifie $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{aa} & \overline{bb} \\ \overline{cc} & \overline{dd} \end{pmatrix}$ si et seulement si $ad - bc = 0$ et $a + d = 11$. Étudier la réciproque. Comment faire de même avec des entrées à 2 chiffres ?

Exercise 1.339 (Question subsidiaire)**.** Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Solution ici : Section 2.111.

1.24 Programme 24 : Dénombrement, Matrices

1.24.1 Khôlle 112 : Lemme de Whitehead, Hyperplan de matrice

Exercise 1.340 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule du binôme.

Exercise 1.341 (Problème principal)**.** [Lemme de Steinberg-Whitehead] On note $e_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ la matrice de transvection et $E_n = \langle e_{i,j}(\lambda)\rangle_{i\neq j,\ \lambda\in\mathbb{K}} \subsetneq GL_n$. Montrez que : $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\lambda+\mu)$, puis $[e_{i,j}(\lambda), e_{j,\ell}(\mu)] = e_{i,\ell}(\lambda\mu)$ si $i \neq \ell$ et $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\mu)] = I_n$ pour $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En déduire que $DG\left(E_n\right) = E_n$.

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, montrez que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ s'écrit comme produit de 4 transvections. Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in GL_n$, montrez qu'on peut écrire avec n^2 transvections $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$, puis que $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$. Montrez que $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ est un morphisme de groupe. Montrez que $DG\left(GL_n\right)$ est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

Exercise 1.342 (Question subsidiaire)**.** Pour $n \geq 2$, montrez que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution ici : Section 2.112.

1.24.2 Khôlle 113 : Hyperplan de matrice stable par multiplication

Exercise 1.343 (Question de cours)**.** Parlez-moi du dénombrement des permutations et des applications injectives d'un ensemble fini.

Exercise 1.344 (Problème principal)**.** Montrez que $\Phi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n^*$, défini par $A \mapsto (\varphi_A : M \mapsto tr(AM))$ est un isomorphisme. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n$, en déduire que $\exists A \in \mathcal{M}_n,\ \mathcal{H} = \text{Ker } \varphi_A$. On suppose que $\mathcal{H}$ est stable par multiplication. Montrez que si $B \in \mathcal{H}$, alors BA est colinéaire à A. Montrez que Im A est non nul. On construit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}$ une base dont le premier vecteur est dans Im A, avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Pour $B \in \mathcal{H}$, donnez la première colonne de $P^{-1}BP$. Montrez que $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$. En déduire enfin que $n = 2$ et $\mathcal{H} \simeq T_2$.

Exercise 1.345 (Question subsidiaire)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouvez les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_4 \notin GL_4$ et résoudre alors $AX = \lambda X$. En déduire $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.

Solution ici : Section 2.113.

1.24.3 Khôlle 114 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire

Exercise 1.346 (Question de cours)**.** Parlez-moi du lemme des bergers.

Exercise 1.347 (Problème principal)**.** [Lemme de Schur] Soit G un sous-groupe de GL_n. Pour $B \in G$, on note $i(B) : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n,\ M \mapsto BMB^{-1}$. Montrez que $i : B \mapsto i(B)$ est un morphisme de groupe de $G \to \text{Aut}(\mathcal{M}_n)$. Montrez que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'autre homothétie que l'identité. Soit $\mathcal{M}_n^G = \{M\ ;\ \forall B \in G,\ i(B)(M) = M\}$. Montrez que pour $M \in \mathcal{M}_n^G$, Ker M et Im M sont stables par G ($x \in V, B \in G \Rightarrow Bx \in V$). Si E n'a pas de sous-espace non trivial stable par G, montrez que $\mathcal{M}_n^G \subseteq \{0_n\} \cup GL_n$ et donnez $\dim \mathcal{M}_n^G$.

Exercise 1.348 (Question subsidiaire)**.** Déterminez le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Solution ici : Section 2.114.

1.25 Programme 25 : Dénombrement, Arithmétique

1.25.1 Khôlle 115 : Théorème de Singmaster, Problème de Josephus

Exercise 1.349 (Question de cours)**.** Parlez-moi du petit théorème de Fermat.

Exercise 1.350 (Problème principal)**.** [Théorème de Singmaster] Pour $k \neq 1$, soit $N(k) = \#\left\{(n, r)\ ;\ k = \binom{n}{r}\right\}$. Montrez que $N(k) = O(\log k)$.

Exercise 1.351 (Question subsidiaire)**.** [Problème de Joséphus] 41 personnes numérotées sont disposées en cercle. La première tue son voisin de gauche (le numéro 2, qui sort du cercle), son nouveau voisin de gauche (le numéro 3) tue son propre voisin gauche (le numéro 4), etc. Quand on a fait un tour du cercle, on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'un seul survivant. Qui survit ?

Solution ici : Section 2.115.

1.25.2 Khôlle 116 : Plateaux d'échecs, Super-triangles de Héron

Exercise 1.352 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'algorithme d'Euclide.

Exercise 1.353 (Problème principal)**.** Combien y a-t-il de plateaux d'échecs possibles ? (La promotion de pièce est interdite.)

Exercise 1.354 (Question subsidiaire)**.** [Super-triangles de Héron] On s'intéresse aux triangles dont les longueurs des côtés, le périmètre et l'aire sont des entiers, et aire=périmètre. Prouvez qu'il y a un nombre fini de tels triangles et énumérez-les. Rappel de la formule de Héron : si $s = \frac{1}{2} \times$ périmètre, alors aire$^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ où a, b et c sont les longueurs des côtés.

Solution ici : Section 2.116.

1.25.3 Khôlle 117 : Nombre en base donnée, Problème de Catalan

Exercise 1.355 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la décomposition en facteurs premiers.

Exercise 1.356 (Problème principal)**.** Soit $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{N}^*$. On définit l'écriture en base $\mathcal{B}$ d'un nombre par une suite $(a_1, ..., a_n)$ avec $\forall i,\ 0 \leq a_i < b_i$: $\overline{a_1 a_2 ... a_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \prod_{i<j} b_j\right)$.

Montrez que le nombre de nombres qu'on peut exprimer avec cette écriture ne dépend pas de l'ordre des (b_i) dans $\mathcal{B}$, mais que l'écriture en dépend. Montrer que cette écriture induit une bijection entre $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$ et $[\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$. Comment utiliser cette écriture pour fournir un algorithme d'énumération de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$?

Exercise 1.357 (Question subsidiaire)**.** Montrer que si α est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ avec a, b et c impairs, alors α est irrationnel. Que ce passe-t-il pour les racines rationnelles d'un polynôme de $\mathbb{Q}_n[X]$?

Exercise 1.358 (Question subsidiaire)**.** Montrez qu'il n'existe qu'un seul cube impair non nul qui est immédiatement suivi d'un carré (résoudre $x^2 - y^3 = 1$).

Solution ici : Section 2.117.

1.26 Programme 26 : Intégration, Continuité

1.26.1 Khôlle 118 : Lemme de Riemann-Lebesgue, Norme $\mathcal{L}^\infty$

Exercise 1.359 (Question de cours)**.** Parlez-moi des fonctions en escaliers.

Exercise 1.360 (Problème principal)**.** [Lemme de Riemann-Lebesgue] Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrez que $u_n \to 0$. Montrez que cette propriété est conservée quand f est continue par morceaux.

Exercise 1.361 (Question subsidiaire)**.** [Norme $\mathcal{L}^\infty$] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ positive. Montrez que $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \to \sup f$. Pour g continue et strictement positive sur $[a,b]$, montrez que $v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et donnez sa limite.

Solution ici : Section 2.118.

1.26.2 Khôlle 119 : Inégalité de Minkowski

Exercise 1.362 (Question de cours)**.** Parlez-moi des sommes de Riemann.

Exercise 1.363 (Problème principal)**.** [Inégalité de Minkowski] Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_m([a,b])$, montrez que : $\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$, et discutez du cas d'égalité.

Exercise 1.364 (Question subsidiaire)**.** Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et $g \in \mathcal{C}^0_m([a,b])$ positive. Montrez qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$. Si g est continue et strictement positive, montrez que c peut être pris dans $]a,b[$.

Solution ici : Section 2.119.

1.26.3 Khôlle 120 : Limite ésotérique, Somme de Riemann pondérée

Exercise 1.365 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercise 1.366 (Problème principal)**.** Déterminez $\lim_{+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercise 1.367 (Question subsidiaire)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Soit $u_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$. Montrez que u_n converge et donnez sa limite.

Solution ici : Section 2.120.

1.26.4 Khôlle 121 : Tchebychev pour les sommes

Exercise 1.368 (Question de cours)**.** Montrez qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

Exercise 1.369 (Problème principal)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On connaît $A = \int_0^1 f$ et $B = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$. Montrez que $\int_0^1 f^2 \geq 4\left(A^2 - 3AB + 3B^2\right)$. Montrez que cette inégalité est optimale.

Exercise 1.370 (Question subsidiaire)**.** [Inégalité de Tchebychev pour les sommes] Soient x_i et y_j deux familles croissantes de n réels. Montrez que $\frac{1}{n}\sum_k x_k y_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_j y_j\right)$. En déduire que si $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ sont croissantes, alors : $\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$. Que ce passe-t-il si f et g sont monotone en général ?

Solution ici : Section 2.121.

1.26.5 Khôlle 122 : Irrationalité de π, Équivalent de $\ln(n!)$

Exercise 1.371 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la définition d'une intégrale.

Exercise 1.372 (Problème principal)**.** Soit $P_n = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n$ pour des entiers a, b, n. Prouvez que $I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin x \, \mathrm{d}x$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrez que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et en ${}^a\!/\!_b$. Si on suppose que $\pi = {}^a\!/\!_b \in \mathbb{Q}$, montrez que I_n est un entier non nul. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 1.373 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n)$.

Solution ici : Section 2.122.

1.26.6 Khôlle 123 : Méthode de Simpson

Exercise 1.374 (Question de cours)**.** En quoi $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire ?

Exercise 1.375 (Problème principal)**.** [Formule de Simpson] Soit $h, k \in \mathbb{R}$. Montrez que $\int_{-h}^h (x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $k = 0$. En déduire que pour a, b, c trois réels, $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $c = \frac{a+b}{2}$. Établir que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \ \int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

Exercise 1.376 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ avec $\int_0^1 f = 0$. On pose $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Montrez que $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.

Solution ici : Section 2.123.

1.27 Programme 27 : Groupe symétrique, Intégration

1.27.1 Khôlle 124 : Problème d'optimisation, Norme $\mathcal{L}^\infty$

Exercise 1.377 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la signature dans $\mathcal{S}_n$.

Exercise 1.378 (Problème principal)**.** Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1])\ ;\ f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Montrez que pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$, puis $\int_0^1 |f' - f| \geq \frac{1}{e}$, et discutez le cas d'égalité. Soit $f_n : x \mapsto n(2x - nx^2)e^{x-1}$ si $x \in [0, 1/n[$ et e^{x-1} si $x \in [1/n, 1]$. Montrez que $f_n \in \mathcal{E}$. Montrez que $I_n = \int_0^1 |f_n' - f_n|$ vérifie $I_n = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-x)e^{x/n}\mathrm{d}x$, et $\left|I_n - \frac{1}{e}\right| \leq \frac{1}{e}\left(e^{1/n} - 1\right)$. Conclure.

Exercise 1.379 (Question subsidiaire)**.** [Norme $\mathcal{L}^\infty$] Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ positive. Montrez que $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \to \sup f$. Pour g continue et strictement positive sur $[a,b]$, montrez que $v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et donnez sa limite.

Solution ici : Section 2.124.

1.27.2 Khôlle 125 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$

Exercise 1.380 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la décomposition en produits de cycles à support disjoints dans $\mathcal{S}_n$.

Exercise 1.381 (Problème principal)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $p, t, i : [-a, a] \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues par morceaux avec p et t paires, i impaire. Simplifiez :

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}}\ \mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de $\int_{-e}^{e} \frac{x^4}{1+\pi^{x^7}}\ \mathrm{d}x$ et $\int_{-e}^{e} \frac{x^4}{1+(\cos x)^{\sin x}}\ \mathrm{d}x$.

Exercise 1.382 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrez qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Solution ici : Section 2.125.

1.27.3 Khôlle 126 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue

Exercise 1.383 (Question de cours)**.** Soit $t = (a\ b)$ une transposition et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Que vaut $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$?

Exercise 1.384 (Problème principal)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un polynôme P de degré impair vérifiant : $\forall n, x,\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrez que f est la fonction nulle. Que se passe-t-il si P est pair ?

Exercise 1.385 (Question subsidiaire)**.** [Lemme de Riemann-Lebesgue] Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrez que $u_n \to 0$. Montrez que cette propriété est conservée quand f est continue par morceaux.

Solution ici : Section 2.126.

1.28 Programme 28 : Groupe Symétrique, Déterminant

1.28.1 Khôlle 127 : Type cyclique, Coordonnées de Plücker

Exercise 1.386 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'inversibilité de $A \in \mathcal{M}_n$.

Exercise 1.387 (Problème principal)**.** Montrez que le type cyclique d'une permutation est stable par conjugaison. Montrez que le type cyclique est stable par l'inverse. En déduire que toute permutation est conjuguée à son inverse.

Exercise 1.388 (Question subsidiaire)**.** [Coordonnées de Plücker] Pour $M \in \mathcal{M}_{2,k}(\mathbb{R})$, on définit la coordonnée $p_{i,j}$ de Plücker, par $p_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{1i} & m_{1j} \\ m_{2i} & m_{2j} \end{vmatrix}$ ($p_{i,i} = m_{1i}$). Montrez que ces coordonnées introduisent une injection des plans de $\mathbb{R}^k$ dans les droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Pour $i < j < k < l$, montrez que : $p_{i,k}p_{j,l} + p_{i,l}p_{j,k} = -p_{i,j}p_{j,k}$. En déduire que ce n'est pas une bijection.

Solution ici : Section 2.127.

1.28.2 Khôlle 128 : Permutation d'ordre 2, Démonstration de Zagier

Exercise 1.389 (Question de cours)**.** Comment développer un déterminant ?

Exercise 1.390 (Problème principal)**.** Soit $n \geq 3$ impair et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = id$. Montrez que σ possède au moins un point fixe.

Exercise 1.391 (Question subsidiaire)**.** [Zagier] Soit $p \equiv 1$ [4] un nombre premier. Soit $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \ ; \ x^2 + 4yz = p\}$. En supposant que $\#\mathcal{S}$ est impair, montrez que $f : (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ a au moins un point fixe, puis que p est la somme de deux carrés. Comptez les points fixes de $g : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et concluez :

$$g : (x, y, z) \longmapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{si } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{si } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.128.

1.28.3 Khôlle 129 : Théorème de Futurama, Sous-espaces stricts

Exercise 1.392 (Question de cours)**.** Parlez-moi du Van der Monde.

Exercise 1.393 (Problème principal)**.** [Théorème de Futurama] Soit k transpositions **différentes** $(\tau_i)_i \in \mathcal{S}_n^k$. On pose $\sigma = \tau_k\tau_{k-1}...\tau_2\tau_1$. Montrez qu'il existe des transpositions **différentes** $(\pi_j)_j \in \mathcal{S}_{n+2}^p$ telles que $\pi_p...\pi_1\sigma = id$ et $\forall i \neq j, \pi_i \neq \tau_j$. Montrez qu'on peut prendre $p \leq n + 3$.

Exercise 1.394 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\mathbb{Q}^2$ est réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{Q}^2$ (comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver 2 espaces vectoriels de dimension infinie qui sont réunions dénombrables de sous-espaces stricts. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrez que E n'est pas réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts (posez $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + ... + \lambda^{n-1} e_n$ pour $(e_i)_i$ une base de E).

Solution ici : Section 2.129.

1.28.4 Khôlle 130 : Groupe alterné

Exercise 1.395 (Question de cours)**.** Parlez-moi des comatrices.

Exercise 1.396 (Problème principal)**.** [Groupe alterné] Montrez que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est distingué dans $\mathcal{S}_n$ (i.e. que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall \tau \in \mathcal{A}_n, \sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$). Montrez qu'une permutation est dans le groupe alterné si et seulement si elle s'écrit comme un produit d'un nombre pair de transpositions. Montrez qu'un cycle de $\mathcal{S}_n$ de longueur m est dans $\mathcal{A}_n$ si et seulement si m est impair. Montrez que $\mathcal{A}_n$ est le groupe engendré par les 3-cycles. Soit τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Montrez que $\phi : \sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ et calculez le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercise 1.397 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $D\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$ (utilisez que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles), puis calculez $D\mathcal{A}_n$ pour $n \leq 4$.

Solution ici : Section 2.130.

1.28.5 Khôlle 131 : Centre de $\mathcal{S}_n$, Hyperplan affin

Exercise 1.398 (Question de cours)**.** Parlez-moi des formes n-linéaires alternées.

Exercise 1.399 (Problème principal)**.** Déterminez le centre du groupe symétrique. On pourra regarder $\phi_{(a\ b)} : \sigma \mapsto \sigma(a\ b)\sigma^{-1}$.

Exercise 1.400 (Question subsidiaire)**.** Soit $n+1$ "rayons" $\vec{r}_0, ..., \vec{r}_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$ soit libre et $\vec{r}_n \neq \vec{0}$. On choisit des "hauteurs" $h_0, ..., h_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$ et on construit l'hyperplan affine $H_{\mathbf{r}}$ qui passe par les points $h_0\vec{r}_0, ..., h_{n-1}\vec{r}_{n-1}$. Déterminez h_n tel que le point $h_n\vec{r}_n$ soit dans $H_{\mathbf{r}}$.

Solution ici : Section 2.131.

1.28.6 Khôlle 132 : Unique décomposition, Transformée de Hankel

Exercise 1.401 (Question de cours)**.** Quels sont les déterminants faciles ?

Exercise 1.402 (Problème principal)**.** Soient $\sigma_i = (1\ 2\ ...\ i) \in \mathcal{S}_n$. Montrez que $s \in \mathcal{S}_n$ s'écrit de manière unique : $s = \sigma_n^{k_n} \circ \sigma_{n-1}^{k_{n-1}} \circ ... \circ \sigma_2^{k_2}$ avec $k_j \in \{0, .., j-1\}$.

Exercise 1.403 (Question subsidiaire)**.** [Déterminants de Hankel] Soit $(b_n)_n$ une suite de réels. On construit sa transformée de Hankel $(h_n)_n$ par :

$$h_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & ... & b_{2n} \end{vmatrix}$$

Montrez que $(b_n)_n = 0 \Leftrightarrow (h_n)_n = 0$. Montrez que $(b_n)_n$ vérifie une relation de récurrence ssi sa $(h_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang. Montrez que $(h_n)_n$ est invariante par la transformation d'Euler, c'est-à-dire que la transformée de Hankel de $(c_n)_n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$ est $(h_n)_n$ (on utilisera $B = \left[\binom{j-1}{i-1}\right]_{i,j}$).

Solution ici : Section 2.132.

1.29 Programme 29 : Déterminant, Espaces euclidiens

1.29.1 Khôlle 133 : Inégalité duale, Démonstration de Zagier

Exercise 1.404 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la projection orthonormale.

Exercise 1.405 (Problème principal)**.** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$ et étudiez les cas d'égalité. On suppose maintenant que $x^2+2y^2+3z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x+y+z)^2 \leq {}^{11}/_{6}$. Généraliez.

Exercise 1.406 (Question subsidiaire)**.** [Zagier] Soit $p \equiv 1$ [4] un nombre premier. Soit $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \; ; \; x^2+4yz = p\}$. En supposant que $\#\mathcal{S}$ est impair, montrez que $f : (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ a au moins un point fixe, puis que p est la somme de deux carrés. Comptez les points fixes de $g : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et concluez :

$$g : (x, y, z) \longmapsto \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{si } x < y-z \\ (2y-x, y, x-y+z) & \text{si } y-z < x < 2y \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.133.

1.29.2 Khôlle 134 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur

Exercise 1.407 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème de Pythagore.

Exercise 1.408 (Problème principal)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien. Soit $P \in \mathscr{L}(E)$ de norme ≤ 1 $(\forall x, ||Px|| \leq ||x||)$, auto-adjoint $(\forall x, y, \langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle)$. Pour $\lambda \in [0, 1]$, montrez que $(x|y)_{P,\lambda} = \langle x \,|(id_E - \lambda P)y \rangle$ est un produit scalaire.

Exercise 1.409 (Question subsidiaire)**.** Soit $u, v \in E$, un espace euclidien, tels que $||u|| = ||v||$. Soit $H = \{x \in E \; ; \; ||u-x|| = ||v-x||\}$. Faites un dessin dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrez que $H = \{u-v\}^{\perp}$, en déduire $\dim H$. Montrez que v est l'image de u par la symétrie orthogonale vis-à-vis de H.

Solution ici : Section 2.134.

1.29.3 Khôlle 135 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice

Exercise 1.410 (Question de cours)**.** Parlez-moi du procédé de Gram-Schmidt.

Exercise 1.411 (Problème principal)**.** [Fonction scalaire de Leibnitz] Soit E euclidien. Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_i a_i M A_i^2 = \sum_i a_i ||M - A_i||^2$. On construit G, barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, défini par $\sum_i a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. En déduire que $f(M) = f(G) + \left(\sum_i a_i\right) MG^2$. Soient A, B deux points du plan et a, b deux réels. Quel est le lieu des points M du plan qui vérifient $aAM^2 + bBM^2 = k$ où k est une constante ?

Exercise 1.412 (Question subsidiaire)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$. Montrez que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Solution ici : Section 2.135.

1.30 Programme 30 : Espaces euclidiens, Probabilités

1.30.1 Khôlle 136 : Matrice de Gram, Décomposition d'Iwasawa

Exercise 1.413 (Question de cours)**.** Parlez-moi des évènements indépendants.

Exercise 1.414 (Problème principal)**.** [Matrice de Gram] Soit $e_i \in E$ et $G = [(e_i|e_j)]_{i,j}$. Si $\mathcal{B} = (e_i)_i$ est une base (pas orthonormée), montrez que pour $x, y \in E$ et $X, Y \in \mathbb{R}^n$ leurs coordonées dans $\mathcal{B}$, on a $(x|y) = {}^tXGY$. Montrez que $u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonale ssi $G(e_1, ..., e_n) = G(u(e_1), ..., u(e_n))$ pour une base $(e_i)_i$. On note $\mathcal{G} = \det G$. Soit M la matrice de $(e_i)_i$ dans une base orthonormée, montrez que Montrez que $G = {}^tMM$, et que $\mathcal{G}(e_1, ..., e_n) \neq 0$ ssi $(e_i)_i$ est libre. En déduire que $\mathcal{G}$ est le carré du produit mixte. Pour $(e_i)_i$ libre, soit $F = \mathrm{Vect}(e_i)_i$ un sous-espace de E, et $x \in F$. Montrez que $\mathrm{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1,...e_p,x)}{\mathcal{G}(e_1,...e_p)}$.

Exercise 1.415 (Question subsidiaire)**.** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez que $M = QR$ pour une unique matrice $Q \in O_n$ et une unique matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux positifs. Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E, $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$. Montrez que $|\det_{\mathcal{B}}(u_i)_i| \leq \prod_j ||u_j||$.

Solution ici : Section 2.136.

1.30.2 Khôlle 137 : Produit inhabituel de polynômes, Famille obtuse

Exercise 1.416 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule de Bayes.

Exercise 1.417 (Problème principal)**.** Pour i, j, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^i \left(\frac{1}{2^k}\right)^j$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)$. On note $(P|Q)$ cette quantité. Montrez que c'est un produit scalaire. Montrez qu'il n'existe pas de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$. Commentez.

Exercise 1.418 (Question subsidiaire)**.** On pose $\widehat{u, v} = \arccos\left(\frac{(u|v)}{||u||\ ||v||}\right)$. Si $\dim E \geq 3$, montrez qu'il n'existe pas $u_1, u_2, u_3 \in E$ tels que $\forall i \neq j,\ \widehat{u_i, u_j} > \frac{2\pi}{3}$.

Solution ici : Section 2.137.

1.30.3 Khôlle 138 : Sous-groupe linéaire fini, Matrice orthogonante

Exercise 1.419 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'une probabilité ?

Exercise 1.420 (Problème principal)**.** [Sous-groupe fini de $GL(E)$] Soit $(E, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ un espace euclidien et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. On définit $(x|y) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle gx|gy \rangle$. Montrez que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire. Soit $\mathcal{O}'(E)$ le groupe orthogonal associé, montrez que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}'(E)$. Montrez qu'il existe $\varphi \in GL(E)$ tel que $\forall g \in G,\ \varphi g \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$ (conjugué : il existe $\psi \in GL(E)$ et H un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ tel que $G = \psi H \psi^{-1}$).

Exercise 1.421 (Question subsidiaire)**.** Déterminez les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \langle X\,|AX\,\rangle = 0$.

Solution ici : Section 2.138.

1.31 Programme 31 : Probabilités

1.31.1 Khôlle 139 : Énigme des 2 garçons, Inégalité via Tchebychev

Exercise 1.422 (Question de cours)**.** Parlez-moi de Markov et Tchebyvhev.

Exercise 1.423 (Problème principal)**.** Vous croisez un ami mathématicien. Vous savez qu'il a exactement 2 enfants et lui demandez "As-tu un garçon ?". Il répond "Oui.". Quelle est la probabilité que l'autre enfant de votre ami soit un garçon ? Vous croisez un second ami qui a aussi exactement 2 enfants, et lui demandez "As-tu un garçon né un mardi ?". Il répond "Oui.". Quelle est la probabilité que l'autre enfant de votre ami soit un garçon ?

Exercise 1.424 (Question subsidiaire)**.** Rappelez la loi, l'espérance et la variance d'une binomiale $\mathscr{B}(4n, 1/2)$. Montrez que $\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$.

Solution ici : Section 2.139.

1.31.2 Khôlle 140 : Adversaire géométrique, Tchebychev optimal

Exercise 1.425 (Question de cours)**.** Que sont l'espérance et la variance ?

Exercise 1.426 (Problème principal)**.** Vous et un adversaire jouez à un jeu : à chaque manche, vous avez une probabilité p_1 de gagner, et votre adversaire une probabilité p_2 (indépendante de p_1). Le premier qui gagne une manche remporte tout. Quelle est la probabilité de votre victoire ? Quelle est la probabilité d'une égalité ? Que ce passe-t-il lorsque les deux joueurs sont aussi forts ($p_1 = p_2$) ?

Exercise 1.427 (Question subsidiaire)**.** [Tchebychev optimal] Soient $(X_i)_{i\in[1,d]}$ des variables aléatoires iid selon une loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_i = +1)$. Pour $S \subset [1, d]$, on pose $Y_S = \prod_{i\in S} X_i$. Montrez que les $(Y_S)_S$ sont **deux à deux indépendantes**. On pose $Z = \sum_{S\subset[1,d]} Y_S$. Montrez que l'inégalité de Tchebychev est une égalité pour Z ($a = 2^d$). Par convention $Y_\emptyset = 1$.

Solution ici : Section 2.140.

1.31.3 Khôlle 141 : Match de tennis, Inégalité de Hoeffding

Exercise 1.428 (Question de cours)**.** Parlez-moi des lois usuelles.

Exercise 1.429 (Problème principal)**.** Federer joue contre Nadal. Indépendamment à chaque point, Federer a une probabilité p de gagner (et Nadal $q = 1-p$). Il y a égalité 40-40 : quelle est la probabilité que Federer gagne le jeu ?

Exercise 1.430 (Question subsidiaire)**.** [Inégalité de Hoeffding] On admet le lemme de Hoffding : si Y est une variable aléatoire bornée entre $-M$ et M, alors pour tout $t > 0$, on a : $\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) \leq e^{t^2 M^2/2}$ Soit $(X_i)_i$ des variables aléatoires indépendantes, bornées entre $-M$ et M (i.e. $\forall i,\ \mathbb{P}(-M \leq X_i \leq M) = 1$). Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose pour simplifier que $\forall n,\ \mathbb{E}(S_n) = 0$. En appliquant l'inégalité de Markov sur $\mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}\right)$, montrez que $\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2nM^2}}$ pour tout $\lambda > 0$.

Solution ici : Section 2.141.

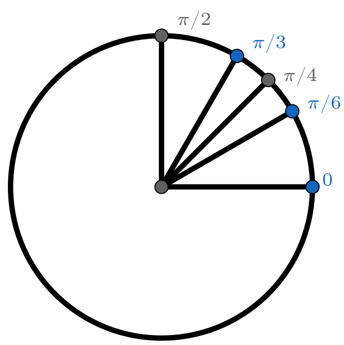
2 Solutions

2.1 Correction Khôlle 1 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 1 : Trigonométrie.

Exercise 2.1 (Question de cours)**.** Il n'est pas nécessaire de connaître par cœur les formules trigonométriques. Néanmoins, il est essentiel de savoir tracer rapidement et efficacement le cercle et y lire les valeurs notables $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$,... et certaines formules qui lient cos, sin, tan,... En particulier : $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$. Bien d'autres formules sont plus simples à exprimer via les exponentielles complexes.

On pourra trouver un cercle trigonométrique ici.



Exercise 2.2 (Problème principal)**.** Plusieurs pistes sont possibles. La plus efficace consiste à poser la fonction $f : x \mapsto \sin\cos x - \cos\sin x$, puis d'en étudier le signe (c'est un réflexe à acquérir face à ce genre de problème). Une étude de signe commence toujours par la résolution de l'équation $f(x) = 0$, dont la résolution peut être rédigée comme il suit.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. On a alors : $\cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) - \cos\sin x = 0$

De fait : $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x$

Il s'ensuit que : $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$

On remarque ici une forme en $a\cos\theta + b\sin\theta$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta + \varphi)$. En appliquant ce résultat, on a : $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \varphi_\pm)$ pour un certain $\varphi_\pm$ (qu'il n'est pas utile de calculer et qui est différent pour le $+$ et pour le $-$ du $\pm$, attention à l'abus de notation).

Dès lors : $\cos(x+\varphi_\pm) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Or une simple vérification donne : $\pi > 3 > 2\sqrt{2}$, donc $\cos(x + \varphi_\pm) > 1$.

Cela est impossible, ainsi, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f garde un signe fixe. Calculons $f(0)$ pour le déterminer (en utilisant à nouveau que $\sin < 1$) :

$$f(0) = \sin 1 - \cos 0 = \sin 1 - 1 < 0$$

Finalement, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin \cos x < \cos \sin x$$

Exercise 2.3 (Question subsidiaire)**.** Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle usuellement tracé dans le cercle trigonométrique. Identifiez les côtés et lisez les valeurs, on retrouve directement la formule souhaitée. Le but est plus de voir si vous parvenez à fournir une explication orale claire du tac-au-tac sur un problème dont vous avez parfaitement intégré la formule mais pas forcément la démonstration.

On pourrait aussi vous demander de démontrer grâce au cercle trigonométrique que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, en définissant $\tan x$ (pour $x \in \mathbb{R}$) comme la longueur indiquée sur la deuxième image de la page Wikipédia mentionnée ci-dessus.

Retour à Khôlle 1 : Trigonométrie.

2.2 Correction Khôlle 2 : Logique

Retour à Khôlle 2 : Logique. L'intérêt de la khôlle est de vous sortir de votre zone de confort (doucement) en vous demandant de travailler avec une notion abstraite dont vous ne maîtrisez pas pleinement les tenants et les aboutissants. Prenez votre temps, faites les choses calmement et saisissez l'occasion pour apprendre des choses nouvelles : **profitez !**

Exercise 2.4 (Question de cours)**.** On rappelle les tables de vérités usuelles. On fera attention à celle de l'implication. Pour chacune, essayez de trouver des phrases claires en français que illustrent les cas que vous pensez compliqués.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

Exercise 2.5 (Problème principal)**.** Pour démontrer une telle proposition, on va construire petit à petit la formule en vérifiant que dans les 4 cas possibles pour P et Q, la formule est vraie (c'est-à-dire qu'on a une colonne avec que des 1).

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \neg P \Rightarrow Q$	$\gamma : \alpha \wedge \beta$	$\gamma \Rightarrow Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

On remarquera qu'on a même montré une formule plus forte car les colonnes Q et γ sont rigoureusement les mêmes : $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow Q$

N'hésitez pas à interpréter la phrase en français à l'aide de "P : il va pleuvoir demain" et "Q : je vais prendre mon parapluie demain".

On procède de la même manière :

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \alpha \Rightarrow P$	$\beta \Rightarrow P$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Ici aussi, on a en réalité une équivalence entre P et β : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow P$.

Vous pouvez vous amuser à remplacer les assertions P et Q par des phrases dotées de sens, mais cette formule est bien moins intuitive que la précédente !

Exercise 2.6 (Question subsidiaire)**.** Interprétation : prendre P : il va pleuvoir demain et Q : Je prendrai mon parapluie demain.

Équivalences finales : Voir ci-dessus.

Autre démonstration de Pierce : On utilise le principe de contraposition, l'écriture de l'implication comme disjonction et le lois de De Morgan :

$$
\begin{aligned}
&(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg P))
\end{aligned}
$$

La dernière affirmation est une tautologie en vertu du principe du tiers exclus : $A \vee \neg A$ (en réalité, la loi de Pierce est équivalente au principe du tiers exclu).

Retour à Khôlle 2 : Logique.

2.3 Correction Khôlle 3 : Logique

Retour à Khôlle 3 : Logique.

Exercise 2.7 (Question de cours)**.** Soit $\mathcal{P}$ le plan usuel. On a le théorème de Thalès :

$\forall (A, B, C, D, E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$(BC) \parallel (DE) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

Sa réciproque (qui est vraie) :

$\forall (A, B, C, D, E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow (BC) \parallel (DE)$

Et sa contraposée (qui est vraie) :
$\forall(A,B,C,D,E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE} \Rightarrow (BC) \nparallel (DE)$

Exercise 2.8 (Problème principal)**.** Montrons la contraposée : si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8. Soit n impair, il s'écrit alors $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1;3\}$. De fait : $n^2-1 = 16k^2+8kr+r^2-1$. Reste à regarder que $3^2-1 = 8$ et $1^2-1 = 0$ sont des multiples de 8, ce qui est évident.

Exercise 2.9 (Question subsidiaire)**.** La division en 4 carrés se fait par les médiatrices des côtés (il faut montrer que ce sont des carrés tout de même). La division en 6 est plus astucieuse. Il faut prendre la division en 9 carrés (on divise chacun des côtés en 3), et réunir les 4 carrés en haut à gauche. Pour la division en 8 carrés, il faut construire un premier carré, mettre 3 petits carré en dessous, 3 à sa droite et 1 en bas à droite. Ensuite, on peut passer d'une division en n carrés à une division en $n+3$ carrés en divisant un des carrés présents en 4 (ce qui ajoute $4-1 = 3$ carrés). **Une rédaction propre de la récurrence est attendue.**

Pour compter le nombre manières de découper un carré en n, il faut partir des 1 découpages en 4 et des 4 découpages en 6 et on peut alors compter le nombre de manières de découper un carrée en n carrés par :

$$u_n = (n-3)u_{n-3} + 4(n-6)u_{n-6}$$

Attention, on compte ici les processus de séparation, pas les figures obtenues (ce deuxième calcul étant bien plus ardu).

Retour à Khôlle 3 : Logique.

2.4 Correction Khôlle 4 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 4 : Trigonométrie.

Exercise 2.10 (Question de cours)**.** On peut par exemple partir de :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ensuite :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(1+\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme ce sont des nombres positifs, on a : $(\cos\frac{\pi}{8};\sin\frac{\pi}{8}) = (\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

Exercise 2.11 (Problème principal)**.** On peut le montrer par récurrence. L'écriture exponentielle est la plus efficace. Soit $S_n = \sum e^{i \sum_i^n \pm a_i}$. Il y a 2^n termes dans la somme, et on a :

$$S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$$

$$S_{n+1} = \sum e^{i \sum_i^{n+1} \pm a_i} = e^{ia_n} S_n + e^{-ia_n} S_n = 2\cos a_n S_n$$

Par récurrence, on montre bien que : $S_n = 2^n \prod_i^n \cos a_i$

On a ensuite les parties réelles et imaginaires :

$$\sum \cos\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Re(S_n) = 2^n \prod_i^n \cos a_i$$

$$\sum \sin\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Im(S_n) = 0$$

Exercise 2.12 (Question subsidiaire)**.** On rappelle que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. On note $\Re z$ et $\Im z$ les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe z. Dès lors (la deuxième ligne est une somme géométrique) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) &= \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{\frac{k\pi}{2}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1 - e^{i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}}{2i\sin\frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} \Re\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 4 : Trigonométrie.

2.5 Correction Khôlle 5 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 5 : Trigonométrie.

Exercise 2.13 (Question de cours)**.** Soit x le nombre en question. On a :

$$
\begin{aligned}
x &= 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8})\\
&= 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})\\
&= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\\
&= 2\left(1^2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\\
&= 2\left(1-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Exercise 2.14 (Problème principal)**.** Nommons (E) l'équation à résoudre :

$$
\begin{aligned}
&(E)\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}+16\times 2^{-4\cos^2 x}-10=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(2^{4\cos^2 x}\right)^2-10\times 2^{4\cos^2 x}+16=0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}\ \textit{est solution de}\ X^2-10X+16=0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}\in\{2;8\}\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\in\{\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x\in\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)
\end{aligned}
$$

Exercise 2.15 (Question subsidiaire)**.** Tout d'abord :

$$
\begin{aligned}
\cos 3x=\sin 2x &\Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \pm 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\ \text{ ou }\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi
\end{aligned}
$$

Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
\cos 3x=\sin 2x &\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x=2\sin x\cos x\\
&\Leftrightarrow \cos x=0\ \text{ ou }\ -4\cos^3 x+3+2\sin x=0\\
&\Leftrightarrow \cos x=0\ \text{ ou }\ 4\sin^2 x-1+2\sin x=0
\end{aligned}
$$

Donc $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{13\pi}{10}$ sont solutions de $4X^2+2X-1=0$ (car leur cosinus est non nul). Or les racines de $4X^2+2X-1$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\sin\frac{3\pi}{10} = -\sin\frac{13\pi}{10}$ et avec une étude de signe, on trouve finalement :

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis (attention à justifier le signe par un cercle trigonométrique) :

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Pour compléter le tableau, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Retour à Khôlle 5 : Trigonométrie.

2.6 Correction Khôlle 6 : Logique

Retour à Khôlle 6 : Logique.

Exercise 2.16 (Question de cours)**.** L'assertion n'est certainement pas vraie pour un prédicat quelconque, cependant, elle est vraie pour certains prédicats (ceux pour lesquels on a $p(y,y)$).

Exercise 2.17 (Problème principal)**.** On écrit sous forme réduite $H_2 = \frac{3}{2}$. Le numérateur est impair et le dénominateur est pair. On va montrer par récurrence (forte) que H_n s'écrit sous forme réduite $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair.

$\star$ Supposons que n soit pair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors $H_n = \frac{np_{n-1}+q_{n-1}}{nq_{n-1}}$. Alors H_n s'écrit sous forme réduite $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car la facteur 2 du dénominateur nq_{n-1} ne se simplifie pas avec le numérateur $np_{n-1}+q_{n-1}$.

$\star$ Supposons que $n = 2k-1$ soit impair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors :

$$H_n = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2}H_k + \frac{P}{Q}$$

où la deuxième fraction est sous forme réduite avec Q impair (car on somme des fractions de dénominateur impair) et P le nombre qui convient (peu importe sa valeur exacte).

Ensuite, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair par hypothèse de récurrence. Finalement :

$$H_n = \frac{Qp_k + 2Pq_k}{2Qq_k}$$

De la même manière que précédemment, en réduisant la fraction, on trouve bien $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car $Qp_k + 2Pq_k$ est impair et $2Qq_k$ est pair.

Ainsi, on a montré par récurrence que H_n ne peut jamais être un entier pour $n \geq 2$ car son dénominateur est pair alors que son numérateur est impair.

Exercise 2.18 (Question subsidiaire)**.** Raisonnons par récurrence **forte** pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

Pour n premier, c'est évident : $n|n$. En particulier, l'initialisation est validée avec $n = 2$.

Fixons n et supposons que notre hypothèse soit vérifiée pour tout $1 < k < n$. Si n n'est divisible par aucun $k \in [2, n-1]$, alors n est premier, donc $n|n$ garantit que n est bien divisible par un nombre premier. Sinon, il existe $k \in [2, n-1]$ tel que $k|n$, or, par hypothèse de récurrence, il existe p premier tel que $p|k$. Par transitivité (de la divisibilité) : $p|n$.

Finalement, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

Retour à Khôlle 6 : Logique.

2.7 Correction Khôlle 7 : Binôme de Newton, Pavage par carrés

Retour à Khôlle 7 : Binôme de Newton, Pavage par carrés.

Exercise 2.19 (Question de cours)**. Cf cours !** Attention à bien précisé que a et b doivent commuter (dans les matrices, par exemple, le binôme de Nexton n'est pas toujours vrai). Soient ainsi $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux éléments (d'un même anneau) qui commentent, on a : $(a+b)^1 = a^1b^0 + a^0b^1$. Supposons qu'on ait $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{(n+1)-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} \\
&= a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{(n+1)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien prouvé la formule du binôme de Newton.

Exercise 2.20 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.9.

Exercise 2.21 (Question subsidiaire)**.** On pose $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. On regarde $\frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}$$

On a donc 3 cas.

1. $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (i.e. $n < \frac{a}{b}$), alors $(u_k)_k$ est croissante et le terme dominant est a^n.
2. $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (i.e. $n \leq \frac{b}{a}$), alors $(u_k)_k$ est décroissante et le terme dominant est b^n.
3. Sinon, $(u_k)_k$ est unimodale (croissante puis décroissante), et le terme dominant est celui d'indice $k_0 = E\left(\frac{na-b}{a+b}\right) + 1$.

Retour à Khôlle 7 : Binôme de Newton, Pavage par carrés.

2.8 Correction Khôlle 8 : Cosinus du 20ème de cercle, Chu-Vandermonde

Retour à Khôlle 8 : Cosinus du 20ème de cercle, Chu-Vandermonde.

Exercise 2.22 (Question de cours)**. Surtout, surtout, faites des dessins pour expliquer vos dires !** Ils ne sont pas suffisants pour faire des démonstrations (il faudrait pour cela repartir des définitions), mais le khôlleur ne vous demandera probablement pas de démontrer formellement ce que vous avancez sur les propriétés de base de l'union, l'intersection et le "privé de" s'il voit que vous êtes clair et sûr de vous.

Le tableau que vous devez ressortir est le suivant (on prend deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E possédant un élément x) :

	Union	Intersection	Privé de
Symbole $\star$	$\cup$	$\cap$	$\setminus$
$x \in A \star B \Longleftrightarrow$	$x \in A$ ou $x \in B$	$x \in A$ et $x \in B$	$x \in A$ et $x \notin B$
Associatif ?	oui	oui	non
Commutatif ?	oui	oui	non
Élément neutre ?	oui : $\emptyset$	oui : E	à droite : $\emptyset$
Inverses ?	non	non	à droite : $A^{-1} = A$
Distributivité ?	sur $\cap$	sur $\cup$	formule de De Morgan

Exercise 2.23 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.15.

Exercise 2.24 (Question subsidiaire)**.** Regardons le coefficient de x^q dans $(1+x)^m$. D'après la formule du binôme de Newton, c'est $\binom{m}{q}$. On a en outre :

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &= (1+x)^p(1+x)^{m-p} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m-p}\binom{m-p}{j}x^j\right) \\
&= \sum_{k,j}\binom{p}{k}\binom{m-p}{j}x^{k+j} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k}\binom{p}{k}\binom{m-p}{i-k}\right)x^i
\end{aligned}$$

Dès lors, on peut regarder le coefficient sur x^q (attention à bien saisir sur quel ensemble d'indice varie k) :

$$\binom{m}{q} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{m-p}{q-k}$$

Retour à Khôlle 8 : Cosinus du 20ème de cercle, Chu-Vandermonde.

2.9 Correction Khôlle 9 : Sommation d'Abel, Sommation de cosinus

Retour à Khôlle 9 : Sommation d'Abel, Sommation de cosinus.

Exercise 2.25 (Question de cours)**.** Si $E = F$, alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Réciproquement, si $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$, alors comme $E \in \mathcal{P}(E)$, on a $E = \mathcal{P}(F)$, donc $E \subset F$. Inversement, $F \subset E$, et finalement $E = F$.

Exercise 2.26 (Problème principal)**.** Convenons de poser $A_{-1} = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n}(A_k - A_{k-1})B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1}B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k(B_k - B_{k+1}) \\
&= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k
\end{aligned}$$

Il s'agit en fait de l'intégration par partie pour les sommes et non pour les intégrales. Avec des outils plus puissant de théorie de la mesure, les deux formules sont en fait deux facettes d'une même formule plus générale.

Avec $a_k = 2^k$ et $B_k = k$, on a $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_n = 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (2^{n+1}-1)n - \sum_{k=0}^{n-1}(2^{k+1}-1) = n2^{n+1} - n - 2(2^n - 1) + n = 2^{n+1}(n-1)+2$$

Exercise 2.27 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.11.

Retour à Khôlle 9 : Sommation d'Abel, Sommation de cosinus.

2.10 Correction Khôlle 10 : Sommations trigonométriques

Retour à Khôlle 10 : Sommations trigonométriques.

Exercise 2.28 (Question de cours)**.** On a :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= \{(x,c); (x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B) \text{ } et \text{ } c \in C\} \\ &= \{(a,c); a \in A \text{ } et \text{ } c \in C\} \cup \{(b,c); b \in B \text{ } et \text{ } c \in C\} \\ &= (A \times C) \times (B \times C)\end{aligned}$$

Exercise 2.29 (Problème principal)**.** On a :

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\theta}{2}C_n &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left((k+{}^1\!/_2)\theta\right) - \sin\left((k-{}^1\!/_2)\theta\right)\right] \\ &= \sin\left((n+{}^1\!/_2)\theta\right) - \sin\frac{-\theta}{2} \\ &= 2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin{}^\theta\!/_2}$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(k\theta) = 1$, donc $C_n = n + 1$ (le nombre de terme dans la somme).

Exercise 2.30 (Question subsidiaire)**.** On remarque que, pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_n + B_n &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sin^2(k\theta) + \cos^2(k\theta)\right] = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \\ A_n - B_n &= \left[\sin^2(k\theta) - \cos^2(k\theta)\right] = \sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\end{cases}$$

La seconde égalité provient de l'exercice précédent.
On en déduit donc :

$$\begin{cases} A_n & = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \\ B_n & = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \end{cases}$$

Pour finir, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors on a rapidement :

$$\begin{cases} A_n & = n+1 \\ B_n & = 0 \end{cases}$$

Exercise 2.31 (Question subsidiaire)**.**

Retour à Khôlle 10 : Sommations trigonométriques.

2.11 Correction Khôlle 11 : Trigonométrie, Ensembles

Retour à Khôlle 11 : Trigonométrie, Ensembles.

Exercise 2.32 (Question de cours)**.** On a, si $(p+q) \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \frac{-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

On peut alors utiliser $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ pour obtenir (penser à vérifier le signe) :

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2 - 1/2}{\sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/2} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 2+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

Dès lors, avec les formules de tangentes de l'angle de moitié, on retrouve la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercise 2.33 (Problème principal)**.** Résolvons :

- S'il existe X tel que $A \cap X = B$, alors en particulier $B \subseteq A$. Réciproquement, alors si $B \subseteq A$, on a $A \cap B = B$ et plus généralement, pour tout $C \subseteq E \backslash A$, on a $A \cap (B \cup C) = B$. **Faire un dessin !** Reste à montrer qu'on a bien trouvé toutes les solutions de l'équation. Si $A \cap X = B$, alors soit $C = X \backslash A$. On a : $X = (A \cap X) \cup (X \backslash A) = B \cup C$.

  Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation $A \cap X = B$ admet des solutions si et seulement si $B \subseteq A$, et ces solutions sont tous les ensembles de la forme $B \cup C$ avec $C \subseteq E \backslash A$ quelconque.
- S'il existe X tel que $A \cup X = B$, alors en particulier $A \subseteq B$. Réciproquement, alors si $A \subseteq B$, on a $A \cup (B \backslash A) = B$ et plus généralement, pour tout $C \subseteq A$, on a $A \cup ((B \backslash A) \cup C) = B$. **Faire un dessin !** Reste à montrer qu'on a bien trouvé toutes les solutions de l'équation. Si $A \cup X = B$, alors $B \backslash A \subseteq X \subseteq B$, donc il existe $C \subseteq A \cap B = A$ tel que $X = (B \backslash A) \cup C$.

  Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation $A \cup X = B$ admet des solutions si et seulement si $A \subseteq B$, et ces solutions sont tous les ensembles de la forme $(B \backslash A) \cup C$ avec $C \subseteq A$ quelconque.

- S'il existe X tel que $A\Delta X = B$, alors $A\Delta(A\Delta X) = A\Delta B$, or : $A\Delta(A\Delta X) = (A\Delta A)\Delta X$ par associativité, puis $A\Delta(A\Delta X) = \emptyset\Delta X = X$. De fait : $X = A\Delta B$. Réciproquement, $A\Delta(A\Delta B) = B$.

  Par analyse-synthèse, on a prouvé que l'équation $A\Delta X = B$ admet toujours une unique solution : $X = A\Delta B$.

Exercise 2.34 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) &= \sum_{1\leq i=j\leq n} i + \sum_{1\leq i<j\leq n} i + \sum_{1\leq j<i\leq n} j \\
&= n + 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i \\
&= n + 2\sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)}{2} \\
&= n + \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} 1 \\
&= n + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - (n-1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

Remarquons que :

$$\min(i,j) + \max(i,j) = i + j$$

On en déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) - \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) \\
&= 2 \times \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Enfin, notons que $|i-j| = \max(i,j) - \min(i,j)$, d'où :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) - \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Retour à Khôlle 11 : Trigonométrie, Ensembles.

2.12 Correction Khôlle 12 : Racine rationnelle des polynômes rationnels

Retour à Khôlle 12 : Racine rationnelle des polynômes rationnels.

Exercise 2.35 (Question de cours)**.** Cf Exercise 1.19.

Exercise 2.36 (Problème principal)**.** Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}$ écrit sous forme d'une fraction irréductible. Alors, en utilisant que α est racine du polynôme et en multipliant par q^2, on obtient : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. De fait, $ap^2 = q(bp + cq)$, donc $q|ap^2$. Comme $q \wedge p = 1$, on a : $q|a$. De fait, q est impair. De la même manière, $p|c$, donc p est impair. Cependant, on remarque que $ap^2 = -bpq - cq^2$, on a à gauche un nombre impair et à droite la somme de deux nombres impair, c'est-à-dire un nombre pair. C'est un problème ! Finalement, il est impossible que α soit rationnel.

Exercise 2.37 (Question subsidiaire)**.** Cf exercise 1.14.

Retour à Khôlle 12 : Racine rationnelle des polynômes rationnels.

2.13 Correction Khôlle 13 : Étude de fonctions, ln

Retour à Khôlle 13 : Étude de fonctions, ln.

Exercise 2.38 (Question de cours)**.** Soit f et g deux fonctions dérivables et compatibles pour la composition. Alors la composée $f \circ g$ est dérivable (sur le bon ensemble), et :

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha^x := e^{x \ln \alpha}$. On déduit de la formule précédente avec $f := exp$ et $g : x \mapsto x \ln \alpha$ que la dérivée de $h : x \mapsto \alpha^x$ est :

$$h'(x) = \ln \alpha \times e^{x \ln \alpha} = \ln \alpha \times \alpha^x$$

Exercise 2.39 (Problème principal)**.** La fonction est définie, continue et dérivable comme quotient de fonctions sur $]0; +\infty[$. On a pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Donc, f est croissante avant e et décroissante après. Elle atteint son maximum global en e, de valeur $f(e) = e^{-1}$. On a aussi les limites : $\lim_0 f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0^+$. D'où le tableau et le graphe qui vont bien.

Supposons que $a^b = b^a$ avec a, b des entiers naturels (non-nuls) et $a < b$ (le cas $a = b$ fournissant bien évidemment une solution). Alors $\ln a^b = \ln b^a$, et il s'ensuit $f(a) = f(b)$. En appliquant le théorème de la bijection pour f sur $I :=]0, e]$ et $J := [e, +\infty[$, on en déduit que a et b ne peuvent pas être tous les deux dans I ou tous les deux dans J, donc $a \leq e$. De fait, $a \in \{1; 2\}$ et il y a au plus 1 $b \neq a$ tel que $f(b) = f(a)$. Finalement, on traite les deux cas à la main :

1. $\underline{a = 1}$, alors $f(a) = 0$ et il est impossible de trouver b (sinon, on aurait $\ln b = 0$, or $b > e$).

2. $\underline{a = 2}$, alors $b = 4$ convient.

Finalement, les couples solutions de l'équation $a^b = b^a$ avec a et b naturels sont $\{(a, a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 4); (4, 2)\}$.

Exercise 2.40 (Question subsidiaire)**.** Plusieurs approches possibles. Par exemple on peut raisonner par équivalences :

$$\begin{array}{rll} & 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} & = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{3}{2}2^{2x} & = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}3^x \\ \Leftrightarrow & \left(\dfrac{4}{3}\right)^x & = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow & x & = \dfrac{\ln 8 - \ln 3\sqrt{3}}{\ln 4 - \ln 3} \\ \Leftrightarrow & x & = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

On peut aussi remarquer que $3/2$ est solution (parce que cela revient à écrire la décomposition de 12 en bases 2 et 3), puis montrer que l'équation n'a qu'une seule solution.

Retour à Khôlle 13 : Étude de fonctions, ln.

2.14 Correction Khôlle 14 : Étude de fonctions, ln

Retour à Khôlle 14 : Étude de fonctions, ln.

Exercise 2.41 (Question de cours)**. Pour que $\ln f$ soit définie, il faut que $f > 0$!** Supposons $\ln f$ définie et dérivable, et f dérivable. Alors on a : $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$, donc, comme $f > 0$, on en déduit que $(\ln f)'$ et f' ont le même signe (strictement). Ainsi, les monotonies (possiblement strictes) de $\ln f$ et de f sont les mêmes.

Exercise 2.42 (Problème principal)**.** L'expression est correctement définie pour $x \in]0; 1[$, elle est positive. On calcul donc $\ln f$ et on en établit le tableau de variation.

$$\ln f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$$

$\ln f$ est dérivable comme somme et produit :

$$(\ln f)'(x) = \ln x + 1 - \ln(1 - x) - 1 = \ln \frac{x}{1 - x} = -\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

Donc $\ln f$ et par là même f est strictement décroissante sur $]0; 1/2]$ puis strictement croissante sur $[1/2; 1[$. Elle atteint un minimum global en $\frac{1}{2}$ qui vaut :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

On peut remarquer que f est laissé inchangée par l'opérateur $f(.) \mapsto f(1-.)$, donc son graphe admet un axe de symétrie vertical en $x = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, on peut calculer les limites de f en 0 et en 1.

— $\lim_0 \ln f(x) = 0 + (1-0) \times 0 = 0$ donc $\lim_0 f(x) = 1$.

— Par symétrie, $\lim_1 f(x) = 1$.

Exercise 2.43 (Question subsidiaire)**.** On étudie la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est toujours supérieure à 2. Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_i \frac{a_i}{a_i} + 2\sum_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \\ &\geq n + 2 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &\geq n^2\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 14 : Étude de fonctions, ln.

2.15 Correction Khôlle 15 : Trigonométrie et étude de fonctions

Retour à Khôlle 15 : Trigonométrie et étude de fonctions.

Exercise 2.44 (Question de cours)**.** On rappelle les définitions :

$$f^+ : x \mapsto max(0, f(x))$$

$$f^- : x \mapsto max(0, -f(x))$$

On en déduit : $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$. En inversant le système : $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

Exercise 2.45 (Problème principal)**.** Preuve par récurrence avec les formules d'addition. Cas d'égalité qui se voit dans la récurrence.

$$\begin{aligned}|\sin(nx)| &= |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| && (Formule\ d'addition) \\ &\leq |\sin(nx)||\cos x| + |\cos(nx)||\sin x| && (Inegalite\ triangulaire) \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin x| && (|\cos x| < 1) \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| && (Hypothese\ de\ recurrence) \\ &\leq (n+1)|\sin x|\end{aligned}$$

Donc le cas d'égalité intervient quand, d'une part, $|\cos x| = 1$, ce qui induit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\sin x = 0$ et $\sin(nx) = 0$, ce qui est bien une égalité.

Exercise 2.46 (Question subsidiaire)**.** Sur $\mathbb{R}$, x^2+1 est toujours non nul, donc les fonctions sont bien définies. En outre, leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont finies (0 et 1), donc elles sont bornées. Par contre, n'ayant pas encore de tel théorème sur les fonctions continues, il faudra le justifier proprement.

Sinon, on peut faire le calcul à la main et montrer que $0 \leq f < 1$ et $|g| \leq \frac{1}{2}$. On finira par des tracés de graphes. Les tableaux de variation serviront à justifier du caractère borné.

Exercise 2.47 (Question subsidiaire)**.** Avec la méthode des limites, on obtient que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ (on suppose que P et Q n'ont pas de racines communes) est bornée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

— Q n'a pas de racines dans I (et que Q ne s'annule pas aux bords de I).

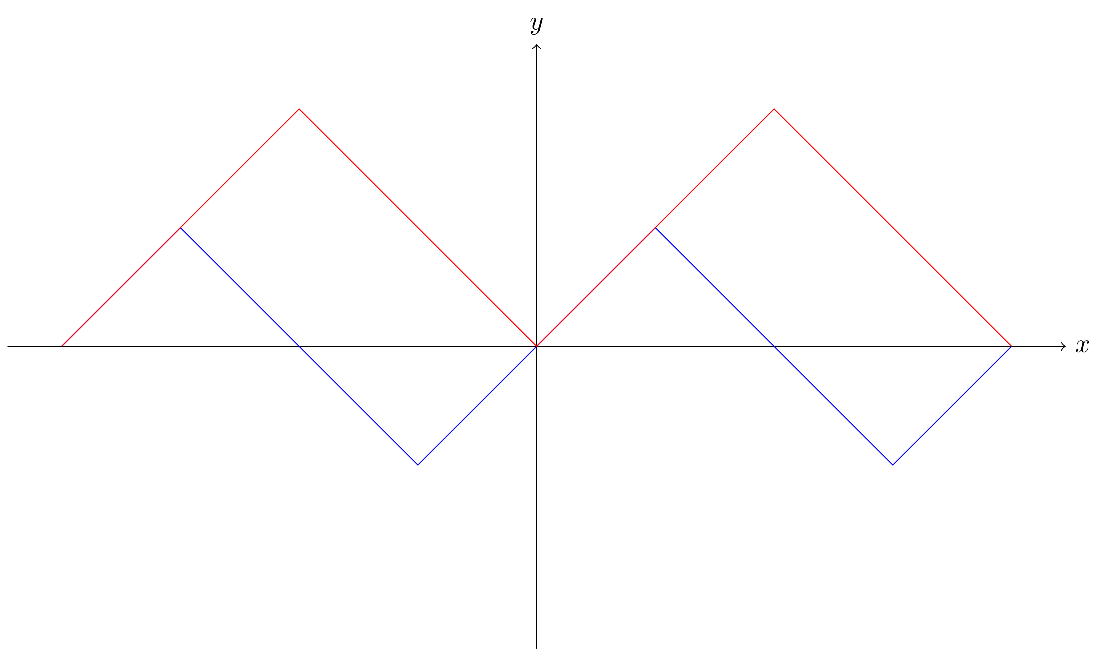
— Si $\pm\infty \in I$, alors $\deg P \leq \deg Q$.

Retour à Khôlle 15 : Trigonométrie et étude de fonctions.

2.16 Correction Khôlle 16 : Polynôme de degré 3

Retour à Khôlle 16 : Polynôme de degré 3.

Exercise 2.48 (Question de cours)**. Cf cours !** En bleu on a $\arcsin \circ \sin$ et en rouge on a $\arccos \circ \cos$.



Exercise 2.49 (Problème principal)**.** On cherche ici à construire un nombre qui se calcule à partir de p et q et dont un simple regard sur le signe nous donnerait le nombre de racines réelles du polynôme $P = X^3 + pX + q$. On remarque tout d'abord que :

$$\left(\lim_{x\to+\infty} P(x)\right) \times \left(\lim_{x\to-\infty} P(x)\right) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires/théorème de bijection, la fonction polynomiale P (qui est continue) s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc P a 1 ou 3 racines sur $\mathbb{R}$. **Faites un dessin !**

En dérivant, on a : $P' = 3X^2 + p$, donc la fonction polynomiale P atteint ses extrêma en $\alpha := -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $\beta := +\sqrt{\frac{-p}{3}}$, **qui sont réels à la condition** $p \leq 0$. On regarde alors les valeurs prises par P en ces abscisses, et surtout leur produit :

$$\begin{aligned}
P(\alpha)P(\beta) &= (q - \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2))(q + \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2)) \\
&= q^2 - \sqrt{-p/3}^2(\frac{2}{3}p)^2 \\
&= \frac{1}{27}\Delta_3
\end{aligned}$$

Où on a fixé le discriminant du polynôme de degré 3, $X^3 + px + q$:

$$\Delta_3 = 27q^2 + 4p^3$$

Ainsi, le simple calcul de ce nombre nous permet d'étudier le signe de $P(\alpha)P(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine entre ces extrêma si ledit produit est négatif. La réciproque se montre simplement en établissant le tableau de variation de la fonction polynomiale P.

Attention cependant, ici, c'est lorsque qu'on a $\Delta_3 < 0$ que le polynôme a 3 racines réelles ! Inversement, lorsque $\Delta_3 > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle, et pour $\Delta_3 = 0$, il y a une racine simple et une double (mais on ne peut dire laquelle est laquelle sans pousser plus loin l'analyse).

Remark. La condition "$p < 0$" est bien induite par "$\Delta_3 < 0$", il n'est donc pas nécessaire de la vérifier en plus.

Exercise 2.50 (Question subsidiaire)**.** On regarde les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$(\ln f)'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc f est croissante sur $]0; e]$ puis décroissante sur $]e; +\infty[$. On en déduit que le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est atteint pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Reste à savoir si $\sqrt{2}$ est plus grand que $\sqrt[3]{3}$ ou le contraire. Or on a :

$$(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$$

Ainsi : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\} = \sqrt[3]{3}$.

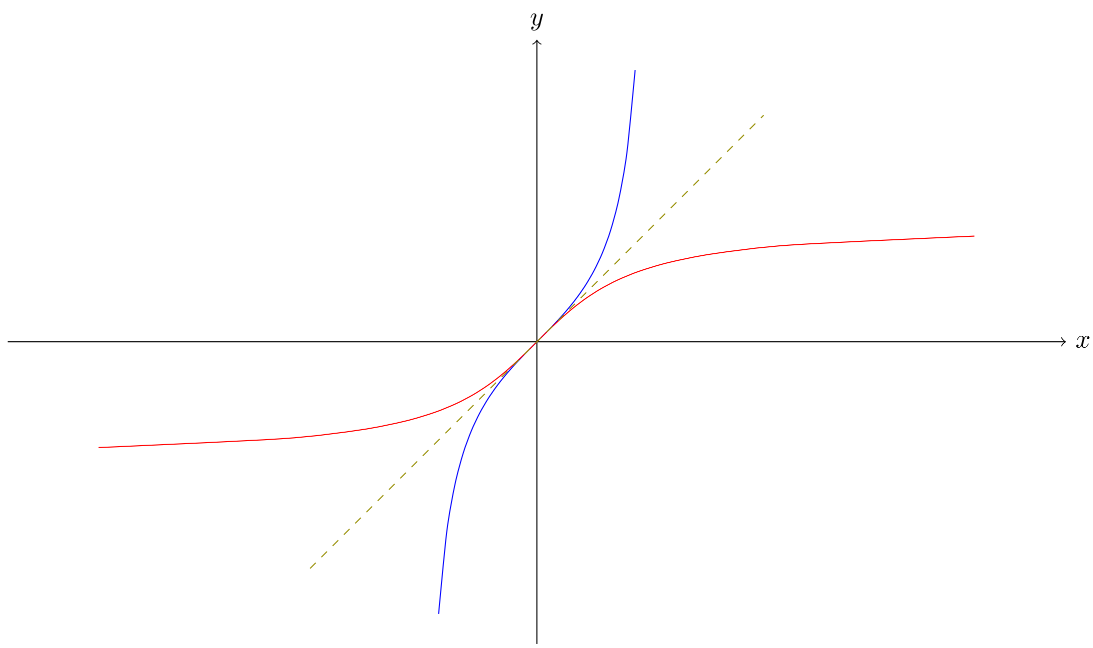
Retour à Khôlle 16 : Polynôme de degré 3.

2.17 Correction Khôlle 17 : Trigonométrie hyperbolique et circulaire

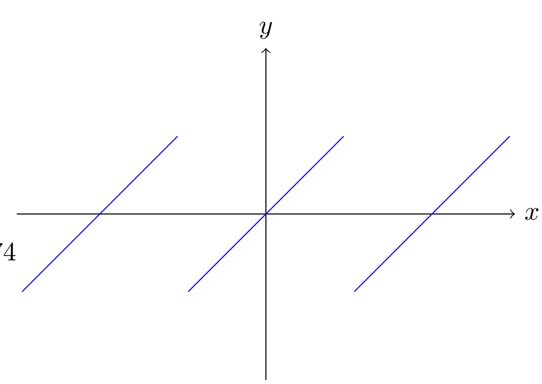
Retour à Khôlle 17 : Trigonométrie hyperbolique et circulaire.

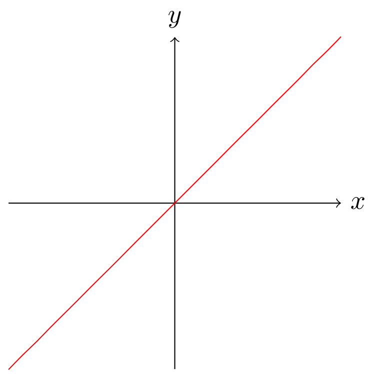
Exercise 2.51 (Question de cours)**. Cf cours !** On peut utilisez la parité et la périodicité pour conclure sur les graphes de $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.

Commençons par regarder les graphes de tan et arctan.



Ensuite, on remarque que la fonction $\arctan \circ \tan$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et coïncide avec la fonction identité, alors que la fonction $\tan \circ \arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec l'identité.





Exercise 2.52 (Problème principal)**.** On a $e^x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$, donc en inversant : $\tan\frac{y}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \tanh\frac{x}{2}$. Ensuite, on peut montrer que :

$$\tanh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \sin y$$

Finalement, $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$. En remarquant que si $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) > 0$ (ce qui est le cas car on a passé cette expression au logarithme), alors $\cos y > 0$, on conclut.

Exercise 2.53 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\tanh x + \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sinh^2 x + \cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{2\cosh 2x}{\sinh 2x}$$

La somme demandée est alors une somme télescopique, et on trouve :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k \times 2}{\tanh(2^k \times 2x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} \right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

Il s'ensuit que, pour $x \neq 0$, $\lim_{+\infty} u_n(x) = +\infty$ (pour $x = 0$, on a évidement $\forall n, u_n(0) = 0$).

Retour à Khôlle 17 : Trigonométrie hyperbolique et circulaire.

2.18 Correction Khôlle 18 : Équations logarithmiques

Retour à Khôlle 18 : Équations logarithmiques.

Exercise 2.54 (Question de cours)**.** Toute fonction f continue et strictement monotone réalise une bijection entre son ensemble de départ et celui d'arrivée. Sa réciproque est aussi une bijection continue de même (stricte) monotonie.

Des fonctions comme $f : x \mapsto x - E(x)$ sont strictement croissantes mais pas continues. Elles ne mettent pas en bijection leur ensemble de départ et d'arrivée.

Exercise 2.55 (Problème principal)**.** L'inégalité est équivalente avec $(x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2$ *et* $x \neq 1$ *et* $x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble de solution est (on le dessinera sur un axe réel) :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]-1; -3/5] \cup [-1/3; +\infty[$$

Exercise 2.56 (Question subsidiaire)**.** Il faut faire attention à ce que $x, y \neq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $\ln xy = 1$, donc $\ln y = 1 - \ln x$. On remplace dans la première expression : $2\frac{1-\ln x}{\ln x} + 2\frac{\ln x}{1-\ln x} = -5$. Ainsi, on obtient $2(1-\ln x)^2 + 2\ln^2 x = -5\ln x(1-\ln x)$ et finalement $-\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$, soit $(\ln x + 1)(-\ln x + 2) = 0$. Ainsi, $(x, y) = (e^2, e^{-1}$ et $(x, y) = (e^2, e^{-1})$ sont les seules possibilités (et elles fonctionnent).

Exercise 2.57 (Question subsidiaire)**.** Plusieurs approches possibles. Par exemple on peut raisonner par équivalences :

$$\begin{array}{lll} & 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} & = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2}2^{2x} & = \frac{4\sqrt{3}}{3}3^x \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{4}{3}\right)^x & = \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow & x & = \frac{\ln 8 - \ln 3\sqrt{3}}{\ln 4 - \ln 3} \\ \Leftrightarrow & x & = \frac{3}{2} \end{array}$$

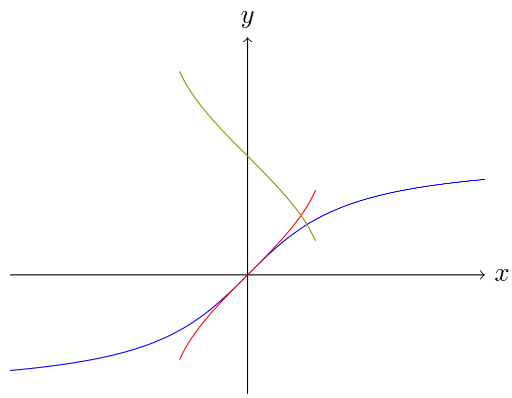
On peut aussi remarquer que $\frac{3}{2}$ est solution (parce que cela revient à écrire la décomposition de 12 en bases 2 et 3), puis montrer que l'équation n'a qu'une seule solution.

Retour à Khôlle 18 : Équations logarithmiques.

2.19 Correction Khôlle 19 : Sommes, Trigonométrie hyperbolique

Retour à Khôlle 19 : Sommes, Trigonométrie hyperbolique.

Exercise 2.58 (Question de cours)**. Cf cours !** Je vous laisse reconnaître les courbes.



Exercise 2.59 (Problème principal)**.** Pour $x = 0$, la somme vaut $100 \sinh 2 \neq 0$. Supposons $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{100} \sinh(2+kx) &= \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_k e^{kx} - e^{-2}\sum_k e^{kx}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x+2}\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{x}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut raisonner par équivalence : $S = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2}$. Donc l'ensemble de solution est $\mathcal{S} = \{\frac{-4}{101}\}$.

Exercise 2.60 (Question subsidiaire)**.** On étudie la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est toujours supérieure à 2. Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_i \frac{a_i}{a_i} + 2\sum_{i<j}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)\\
&\geq n + 2 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2}\\
&\geq n^2
\end{aligned}$$

Exercise 2.61 (Question subsidiaire)**.** On regarde le membre de droite de l'inégalité équivalente : $n^n < (n!)^2$. On a :

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{j=1}^{n}(n-j+1)$$

Donc le terme diagonal de $k(n-j+1)$ (c'est-à-dire quand $k = j$) étant toujours supérieur à n (car l'un des deux l'est alors que l'autre est ≥ 1), donc par produit, on obtient l'inégalité souhaitée.

Retour à Khôlle 19 : Sommes, Trigonométrie hyperbolique.

2.20 Correction Khôlle 20 : Équation hyperbolique

Retour à Khôlle 20 : Équation hyperbolique.

Exercise 2.62 (Question de cours)**.** Voici ce qu'on peut dire en première approche :

- La somme de deux fonctions de même monotonie est de cette monotonie (et si l'une au moins est stricte, la somme est stricte).
- Le produit de deux fonctions de même monotonie et **positives** est de cette monotonie (stricte si l'une au moins est stricte).
- La composée de deux fonctions monotones, lorsqu'elle existe, est croissante si les deux fonctions sont de même monotonie, décroissante sinon.

Exercise 2.63 (Problème principal)**.** Avec des exponentielle, on obtient que $x \in \mathbb{R}$ vérifie $a \cosh x + b \sinh x = c$ si et seulement si e^x est racine du polynôme $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b)$. Cela donne lieu à plein de disjonctions de cas !

Exercise 2.64 (Question subsidiaire)**.** Utilisez $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sinh^2 - \cosh^2 = 1$:

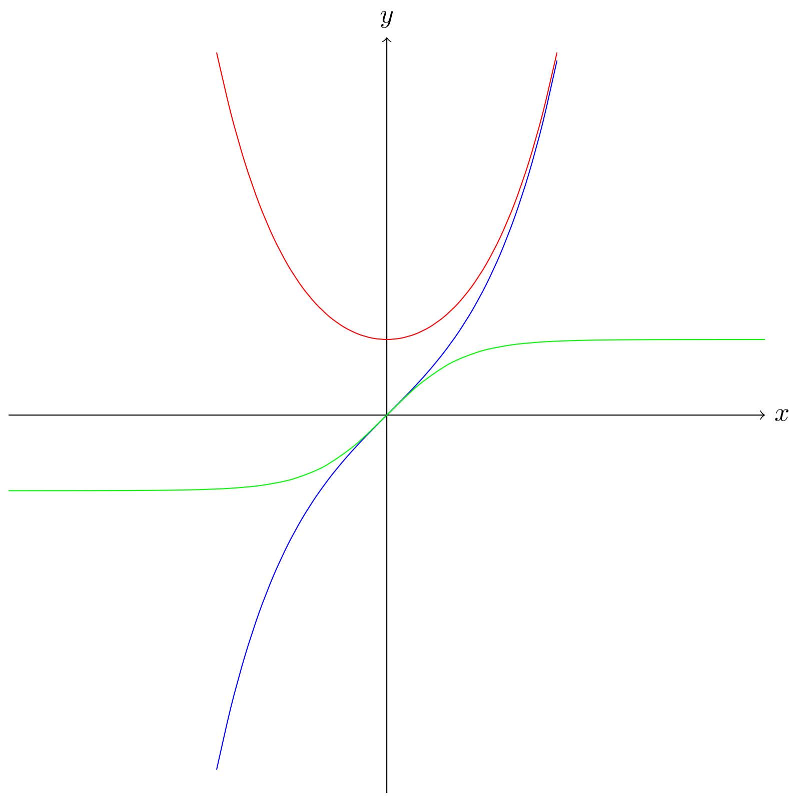
$$\begin{aligned}
\sinh^2 \cos^2 + \cosh^2 \sin^2 &= \sinh^2 \cos^2 + (1 + \sinh^2) \sin^2 \\
&= \sinh^2 (\cos^2 + \sin^2) + \sin^2 \\
&= \sinh^2 + \sin^2
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 20 : Équation hyperbolique.

2.21 Correction Khôlle 21 : Tracés et logarithmes

Retour à Khôlle 21 : Tracés et logarithmes.

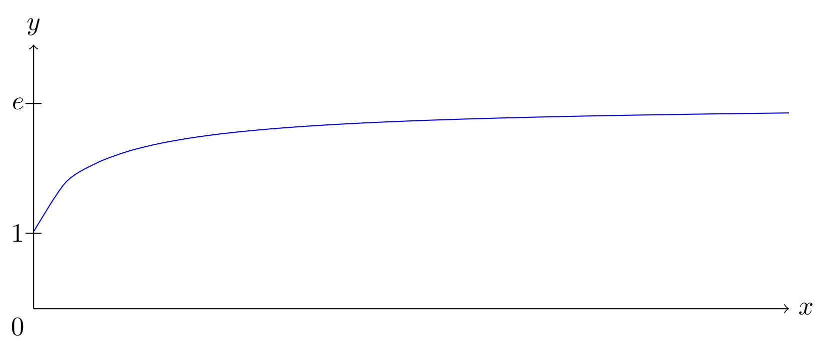
Exercise 2.65 (Question de cours)**. Cf cours !**



Exercise 2.66 (Problème principal)**.** Domaine de définition de $f : \mathbb{R}_+^*$, dérivable dessus (car $1 + \frac{1}{x} > 0$).

$\lim_0 f(x) = 1$ et $\lim_{+\infty} f(x) = e$. Il faut passer par le logarithme et les théorèmes de croissances comparées.

$(\ln f)'(x) = f(x)\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right)$. La partie de droite est une fonction décroissante (de dérivée $\frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$) de limite 0 en $+\infty$, donc positive strictement. Ainsi, f est strictement croissante.



Exercise 2.67 (Question subsidiaire)**.** Attention, l'expression n'est définie que pour $x \notin \{\frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 1\}$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 10}(\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10)) &= \frac{\ln 10x \ln 100x + 2\ln x \ln 100x + 3\ln x \ln 10x}{(\ln x)(\ln 10x)(\ln 100x)} \\ &= \frac{6(\ln x)^2 + (3+4+3)\ln 10(\ln x) + 2(\ln 10)^2}{(\ln x)(\ln x + \ln 10)(\ln x + 2\ln 10)}\end{aligned}$$

On cherche les racines d'un trinôme avec $a = 6$, $b = 10\ln 10$ et $c = 2\ln^2 10$. On a (avec $b' = {}^b\!/_2$) $\Delta' = 13\ln^2 10 > 0$ et donc $\ln x \in \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}\ln 10; \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\ln 10\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} := \{10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}; 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\}$$

Retour à Khôlle 21 : Tracés et logarithmes.

2.22 Correction Khôlle 22 : Bijectivité contrainte

Retour à Khôlle 22 : Bijectivité contrainte.

Exercise 2.68 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.69 (Problème principal)**.** Quitte à permuter f, g et h, on peut supposer que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et $h \circ f \circ g$ est surjective. Alors, comme on sait que si $a \circ b$ injective $\Rightarrow b$ injective et $a \circ b$ surjective $\Rightarrow a$ surjective, on en déduit tout d'abord que h est bijective, $h \circ f$ aussi. Donc $f = h^{-1} \circ (h \circ f)$ est bijective par composition. Enfin, $g = h^{-1} \circ (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est surjective par composition et $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective par composition.

Ainsi, f, g et h sont bijectives.

Exercise 2.70 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.57.

Retour à Khôlle 22 : Bijectivité contrainte.

2.23 Correction Khôlle 23 : Non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Retour à Khôlle 23 : Non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercise 2.71 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.72 (Problème principal)**.** Pour injecter $E \hookrightarrow \mathcal{P}(E)$ on peut par exemple définir $x \mapsto \{x\}$.

Supposons que f soit surjective. Alors il existe un élément y tel que $f(y) = \{x \in E; x \notin f(x)\}$.

— Est-ce que $y \in f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \notin f(y)$, ce qui contredit notre supposition.

— Est-ce que $y \notin f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \in f(y)$, ce qui contredit notre supposition.

Finalement, par l'absurde, $\{x \in E; x \notin f(x)\}$ ne peut pas posséder d'antécédant par f : f n'est pas surjective.

Pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable, il suffit d'appliquer le théorème qu'on vient de prouver avec $E = \mathbb{N}$.

Exercise 2.73 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.67.

Retour à Khôlle 23 : Non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.24 Correction Khôlle 24 : Théorème de Cantor-Berstein

Retour à Khôlle 24 : Théorème de Cantor-Berstein.

Exercise 2.74 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.75 (Problème principal)**.** Il s'agit ici de montrer que :

— Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors $A = B$.

— Si $f \in \{0,1\}^E$, on peut construire une partie de E telle que $\mathbb{1}_A = f$.

Pour le premier point, il suffit de voir que si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$, et par symétrie : $A = B$.

Pour la seconde assertion, on construit l'application $A \mapsto \{x \in E, f(x) = 1\}$. On peut facilement vérifier que cette dernière constitue la bijection réciproque de l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

Exercise 2.76 (Question subsidiaire)**.** Si E ou F est fini, alors l'autre l'est aussi car si E s'injecte dans F fini, alors E a moins d'éléments que F (cela se montre grâce à la partition $E = \bigcup_{y \in F} \hat{f}(y)$ où $\hat{f}(y)$ contient au plus 1 élément car f est injective). Ensuite, si $E \hookrightarrow F$ et $F \hookrightarrow E$, on en déduit que E et F ont le même nombre d'éléments, disons n. Quitte à numéroter les éléments de $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et de $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, on peut introduire la bijection $e_i \mapsto f_i$ de réciproque $f_i \mapsto e_i$.

Passons à la partie plus corsée... Il faut tout d'abord remarquer qu'avec les définitions de l'énoncé, f^{-1} et g^{-1} sont bien définies et vérifient $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ (idem pour g). Par contre, la première égalité n'est définie que pour certains $y \in F$, pas pour tous : $f^{-1} : f(E) \to E$.

La notion de "la suite est finie" signifie qu'à un certain rang, il n'est pas possible de définir le rang suivant (i.e. f^{-1} ou g^{-1} du terme courant n'est pas défini).

h injective : Supposons que $h(x) = h(y)$.

- Si $x, y \in A$, alors $h(x) = f(x) = f(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de f.

- Si $x, y \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de g^{-1} (car si z avait 2 antécédants par g^{-1}, alors il aurait aurait 2 images par g, ce qui n'est pas possible).
- Si $x \in A$ et $y \notin A$, alors $h(x) = f(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = f^{-1}(g^{-1}(y))$, et on peut itérer avec g^{-1} et f^{-1} pour reconstruire la suite qui part de x et celle (décalée de deux rangs) qui par de y. Or la première est finie et la seconde non. Cette contradiction montre que le cas $x \in A$ et $y \notin A$ est en réalité impossible.

h surjective : Soit $y \in F$. On veut construire $z \in E$ tel que $h(z) = y$. Posons $x = g(y)$.

- Si $x \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g - 1(g(y)) = y$, et on a trouvé notre antécédant : $z = x$.
- Sinon, $x \in A$, et donc $z = f^{-1}(g^{-1}(x))$ aussi. De fait, $h(z) = f(f^{-1}(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) = y$, et là encore on a un antécédant.

Finalement, h est bien une bijection de E dans F.

On pourra essayer de voir qui est h lorsque $f = g = \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$, ou bien

$$f = \begin{array}{l} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos x \end{array} \quad \text{et } g = \begin{array}{l} [-1, 1] \to [0, \pi] \\ x \longmapsto \frac{x+1}{2\pi} \end{array}.$$

Retour à Khôlle 24 : Théorème de Cantor-Berstein.

2.25 Correction Khôlle 25 : Dénombrabilité par bijection explicite de Cantor

Retour à Khôlle 25 : Dénombrabilité par bijection explicite de Cantor.

Exercise 2.77 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.78 (Problème principal)**.** On a $f(x-1, y+1) = f(x, y)+1$, $f(0, y) = \frac{1}{2}y(y+3)$ et $f(x, 0) = \frac{1}{2}x(x+1)$, donc $f(y+1, 0) = f(0, y)+1$ donc f est surjective (par récurrence). Elle est aussi strictement croissante en suivant les diagonales de vecteur directeur $(-1, +1)$ dans $\mathbb{N}^2$ (on passe d'une diagonale à la suivante en passant de $(0, y)$ à $(y + 1, 0)$) : **faire un dessin !**

Calculer l'antécédant de $n \in \mathbb{N}$ demande de résoudre d'abord $\frac{a(a+1)}{2} = n$, on identifie ainsi sur quelle diagonale est n, puis on calcule le nombre de pas restants à l'aide de la fonction partie entière. La réciproque explicite est, avec $p = E(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2})$:

$$n \mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2} ; n - \frac{p(p+1)}{2} \right)$$

On a donc une bijection $\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$, or on sait que la relation d'être en bijection est une relation d'équivalence (réflexivité : triviale ; symétrie : existence de la bijection réciproque ; transitivité : la composée de deux bijections est une bijection), donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$. Pour $\mathbb{Q}$, il suffit d'utiliser la forme réduite des fractions pour avoir $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$. Ensuite, $\mathbb{Z}^* \simeq \mathbb{N}$ peut être montré en regardant l'application :

$$n \mapsto \begin{cases} 2n-2 \ si \ n>0 \\ -2n-1 \ si \ n<0 \end{cases}$$

Exercise 2.79 (Question subsidiaire)**.**

Retour à Khôlle 25 : Dénombrabilité par bijection explicite de Cantor.

2.26 Correction Khôlle 26 : Stable engendré par la dynamique de f

Retour à Khôlle 26 : Stable engendré par la dynamique de f.

Exercise 2.80 (Question de cours)**.** Pour $f : E \to F$, on dit que f est :

- Injective : Si un seul antécédant au plus, i.e. $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
- Surjective : Si un antécédant au moins, i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- Bijective : Si un antécédant exactement, i.e. $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$.

Exercise 2.81 (Problème principal)**.** On a : $f(B) \subset \bigcup_n f(A_n) \subset \bigcup_n A_{n+1} \subset B$.

On a évidemment $A \subset B$, et on a vu que $f(B) \subset B$. Reste à montrer que si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $B \subset C$. Or si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $A_1 = f(A) \subset C$, et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset C$, donc $B \subset C$.

Exercise 2.82 (Question subsidiaire)**.** Supposons f injective. Soit $x \in E$, alors écrivons $y = f(x)$, on a $f(y) = f(f(x)) = f(x)$ par définition de f. Or par injectivité, on obtient $y = x$, c'est-à-dire $f(x) = x$, donc $f = \mathrm{Id}_E$ et f est bien surjective.

Inversement, supposons f surjective, alors prenons $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par surjectivité de f, on peut poser $a, b \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Dès lors :

$$x = f(a) = f(f(a)) = f(x) = f(y) = f(f(b)) = f(b) = y$$

On en déduit que f est injective (donc que $f = \mathrm{Id}_E$).

La fonction $f : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ respecte bien $f \circ f = f$ mais n'est ni injective, ni surjective. Dans les espaces vectoriels, les projections fournissent aussi un tel exemple (sauf la projection triviale sur l'espace entier).

Notons $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ si f apparaît n fois. On suppose donc que $f^n(x) = f(x)$ dans la suite, avec $n \geq 2$. Remarquons que $f^{n-1} \circ f = f^n = f \circ f^{n-1}$.

Si f est injective, alors comme $f^n(x) = f(x)$, les éléments x et $f^{n-1}(x)$ ont la même image par f : $f^{n-1}(x) = x$. Il s'ensuit que $f^{n-1} = \mathrm{Id}_E$. En particulier, comme f^{n-1} est surjective, f est surjective.

Si f est surjective, alors soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Dans ce cas, $\forall k \geq 1,\ f^k(x) = f^k(y)$. Par surjectivité, prenons $a, b \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Dès lors :

$$x = f(a) = f^n(a) = f^{n-1}(f(a)) = f^{n-1}(x) = f^{n-1}(y) = f^n(b) = f(b) = y$$

Ainsi, f est injective.

Cependant, il n'est pas obligatoire que $f = \mathrm{Id}_E$ quand f est bijective et $f^n = f$. Par exemple, pour $n = 3$, on peut penser à la fonction $f : x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$, ou pour $n = 5$, à $f : z \mapsto iz$ sur $\mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout n, si λ_n est une racine n-ième de 1, alors $f : z \mapsto \lambda_n z$ vérifie $f^{n+1} = f$ et est bijective sur $\mathbb{C}$.

Retour à Khôlle 26 : Stable engendré par la dynamique de f.

2.27 Correction Khôlle 27 : Application dans les ensembles

Retour à Khôlle 27 : Application dans les ensembles.

Exercise 2.83 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.84 (Problème principal)**. Étude de φ_A**

Si $A = E$, alors $\forall X,\ \varphi_A(X) = X \cap E = X$, donc $\varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$: φ_A est bijective (injective et surjective).

Réciproquement, si $A \neq E$, alors soit $x_0 \in E \backslash A$. On a :

$$\varphi_A(\emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset = A \cap \{x_0\} = \varphi_A(\{x_0\})$$

Ainsi, φ_A n'est pas injective. Par contraposée, si φ_A est injective, alors $A = E$.

Enfin, si $A \neq E$, alors pour tout $X \subseteq E$, $\varphi_A = X \cap A \subseteq A$, donc E n'a pas d'antécédant par φ_A car $E \not\subset A$. Par contraposée, si φ_A est surjective, alors $A = E$.

En résumé, soit $A = E$ et φ_A est à la fois injective et surjective ; soit $A \neq E$ et φ_A n'est ni injective, ni surjective.

Étude de ψ_A

Il y a deux possibilités. On peut adapter le raisonnement précédent, ou bien on peut utiliser l'application $f : X \mapsto \overline{X}$ (le complémentaire de X). Cette application est clairement une bijection des parties de E, même une involution (i.e. $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$). Or, par le théorème de De Morgan :

$$f(\psi_A(X)) = \overline{A \cup X} = \overline{A} \cap \overline{X} = \varphi_{\overline{A}}(f(X))$$

Dès lors, si $\overline{A} = E$ (ce qui revient à $A = \emptyset$), $\varphi_{\overline{A}}$ est bijective, donc par composition $\psi_A = f^{-1} \circ \varphi_{\overline{A}} \circ f$ est bijective aussi.

Inversement, si $\overline{A} \neq E$ (ce qui revient à $A \neq \emptyset$), alors $\varphi_{\overline{A}}$ n'est ni injective, ni surjective, et par composition, il en va de même pour ψ_A.

En résumé, ψ_A est bijective quand $A = \emptyset$ et ni injective, ni surjective sinon.

Exercise 2.85 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.53.

Retour à Khôlle 27 : Application dans les ensembles.

2.28 Correction Khôlle 28 : Images directe et réciproque

Retour à Khôlle 28 : Images directe et réciproque.

Exercise 2.86 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.87 (Problème principal)**.** C'est un exercice assez long, on ne s'attend pas à ce qu'il soit traité en entier !

<u>f injective $\Leftrightarrow \hat{f} \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$:</u>

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \subset \hat{f}(f(X))$.

- $\Leftarrow$ Attention, même si on connaît le théorème "$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective", cela permet seulement de déduire que $\hat{f} \circ f = \mathcal{P}(E)$ induit f injective **de** $\mathcal{P}(E)$ **dans** $\mathcal{P}(E)$ **!** La question est de prouver que f est injective de E dans E.

  Pour ce faire, on regarde $f(x) = f(y)$, on a alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$, puis $x \subset \hat{f}(f(\{x\})) = \hat{f}(f(\{y\})) = Id_{\mathcal{P}(E)}(\{y\}) = \{y\}$, donc $x = y$. f est bien injective.
- $\Rightarrow$ Soit $X \subset E$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $y \notin X$ tel que $y \in \hat{f}(f(X))$, alors $f(y) \in f(X)$, donc $\exists x \in X, f(y) = f(x)$. Or $y \neq x$ par hypothèse ($y \notin X$ et $x \in X$), ce qui contredit l'injectivité de f.

  Finalement, grâce à la remarque du début : $\forall X \subset E, \hat{f}(f(X)) = X$.

<u>f surjective $\Leftrightarrow f \circ \hat{f} = Id_E$:</u>

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \supset f(\hat{f}(X))$.

- $\Leftarrow$ Le théorème "$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective" ne s'applique toujours pas car on obtient $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ surjective (et non $f : E \to E$ surjective).

  Soit $y \in E$, on sait que $f \circ \hat{f}(\{y\}) = \{y\}$, puis $y \subset f(\hat{f}(\{y\}))$, c'est-à-dire que $\exists x \in \hat{f}(\{y\}) \subset E, f(x) = y$: f est bien surjective.
- $\Rightarrow$ Soit $y \in X$. Comme f est surjective, soit x un antécédant de y par f. Par définition, $y \in X$ induit $x \in \hat{f}(X)$. Dès lors, $y = f(x) \in f(\hat{f}(X))$, donc $X \subset f(\hat{f}(X))$.

  Avec la remarque de début de paragraphe, on obtient $\forall X \subset E, f(\hat{f}(X)) = X$.

<u>f injective $\Leftrightarrow \forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$:</u>

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) \subset (f(X) \cap f(Y))$.

- $\Leftarrow$ Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) =: z$. On pose $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. On a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{z\} \neq \emptyset$, donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et ainsi $x = y$. f est injective.
- $\Rightarrow$ Soit $y \in f(X) \cap f(Y)$. Soient $x \in X$ et $x' \in Y$ tels que $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, on a $x = x'$, puis $x \in X \cap Y$ et ainsi $y \in f(X \cap Y)$.

  Avec la remarque de début de paragraphe, on a montré que $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 2.88 (Question subsidiaire)**.** On a $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y$. La relation est donc bien réflexive, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de x est $\mathcal{C}(x) = (x + \pi\mathbb{Z}) \cup ((\pi - x) + \pi\mathbb{Z})$. **Un dessin est le bienvenu !**

La relation $\mathcal{S}$ est réflexive, transitive et anti-symétrique : c'est une relation d'ordre. Pour prouver qu'elle est ant-symétrique, on regarde les fonctions $f_{p,q} : x \mapsto px^q$. Elles sont strictement croissantes sur $[1; +\infty[$ si et seulement si p ou $q > 1$. Par contraposée, si $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et $x, y \geq 1$, alors $x = y$. On peut raisonner de même dans $]-\infty; -1]$. Pour combiner les deux, on se rend compte qu'il est impossible que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ avec $x < -1$ et $y > 1$ car si $y\mathcal{S}x$ et $y \geq 0$, alors $x \geq 0$. Cette relation n'a ni minorant, ni majorant (même si on la restreint à $]-\infty; -1]$ ou à $[1; +\infty)$, elle est partielle, et même pour tout élément x, on peut trouver un élément y tel que ni $x\mathcal{S}y$, ni $y\mathcal{S}x$. Comme $1/2 = 2 \times 1/4$ et $1/4 = (1/2)^2$, $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique sur $\mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 28 : Images directe et réciproque.

2.29 Correction Khôlle 29 : Théorème de Cantor-Berstein

Retour à Khôlle 29 : Théorème de Cantor-Berstein.

Exercise 2.89 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.90 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.76.

Exercise 2.91 (Question subsidiaire)**.** La relation est évidement réflexive et symétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire.

Ensuite, on trace la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, et on se rend compte que la classe d'équivalence de x contient :

- 1 élément si $x \leq 0$ ou $x = 1$.
- 2 éléments si $x > 0$ et $x \neq 1$.

Retour à Khôlle 29 : Théorème de Cantor-Berstein.

2.30 Correction Khôlle 30 : Point fixe d'une application croissante

Retour à Khôlle 30 : Point fixe d'une application croissante.

Exercise 2.92 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.93 (Problème principal)**.** On sait que E admet une borne inférieur. Une telle borne est un minimum (car elle appartient à E qui est l'ensemble considéré), nommons-la m. On a $f(m) \in E$, donc $f(m) \geq \inf E = m$, d'où $m \in X$ et $X \neq \emptyset$.

Si $x \in X$, alors $x \leq f(x)$. Comme f est croissante, on peut l'appliquer à cette inégalité et on obtient $f(x) \leq f(f(x))$, donc $f(x) \in X$.

Comme $X \neq \emptyset$ et que E est muni de bornes supérieures, a existe. Supposons $a \notin X$. Alors $f(a) < a$, et comme f est croissante, $f(f(a)) < f(a)$, donc $f(a) \notin X$, or $f(a) < a$, donc a n'est pas la borne supérieur de X. Ainsi, $a \in X$.

On sait que X est stable par f, donc en particulier $f(a) \in X$, d'où d'une part $a \leq f(a)$. Or d'autre part, a majore X, donc $f(a) \leq a$. Finalement, $f(a) = a$, et a est un point fixe.

On pourra prendre par exemple une application croissante dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans celui-ci.

Exercise 2.94 (Question subsidiaire)**.** On a : $f(B) \subset \bigcup_n f(A_n) \subset \bigcup_n A_{n+1} \subset B$.

On a évidemment $A \subset B$, et on a vu que $f(B) \subset B$. Reste à montrer que si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $B \subset C$. Or si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $A_1 = f(A) \subset C$, et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset C$, donc $B \subset C$.

Retour à Khôlle 30 : Point fixe d'une application croissante.

2.31 Correction Khôlle 31 : Géométrie complexe

Retour à Khôlle 31 : Géométrie complexe.

Exercise 2.95 (Question de cours)**.** On note $z \mapsto \overline{z}$ la conjugaison complexe. Alors $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 1$, $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ et $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, c'est donc bien un (endo)morphisme de corps. Ensuite, on constate que le noyau de ce morphisme est nul (c'est un idéal de $\mathbb{C}$, donc $\{0\}$ ou $\mathbb{C}$ en entier). C'est donc bien un automorphisme de corps.

Enfin, si $\overline{z} = z$, alors $\Im(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

Exercise 2.96 (Problème principal)**.** On a :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')} = 2z\overline{z}+z'\overline{z'} = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$$

Ensuite, en utilisant le précédent résultat et $u^2 = zz'$:

$$\begin{aligned}
&\left(\left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|\right)^2 \\
=&\left|u + \frac{z+z'}{2}\right|^2 + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\left|u^2 - \frac{z^2 + z'^2 + 2zz'}{4}\right| \\
=&2|u|^2 + \frac{|z+z'|^2}{2} + \frac{|z-z'|^2}{2} \\
=&2|zz'| + \frac{1}{2}(|z-z'|^2 + |z+z'|^2) \\
=&(|z| + |z'|)^2
\end{aligned}$$

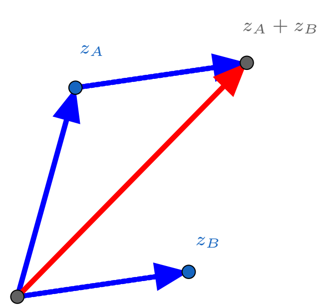
Exercise 2.97 (Question subsidiaire)**.** On regarde le nombre $\frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} = z^2 + z$. Les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si ce nombre est réel. On cherche donc les solutions des équations $z^2 + z - \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant : $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda})$. Donc les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement $z \in (\mathbb{R} \cup \{\tau ; \Re(\tau) = 1/2\})$. **À dessiner dans le plan complexe !**

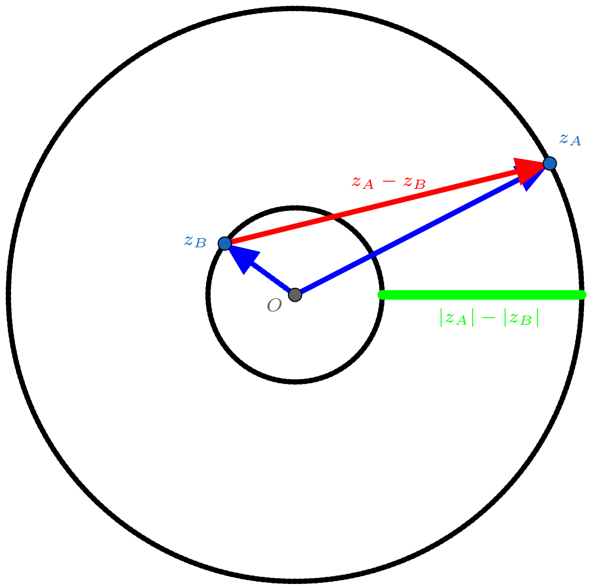
Retour à Khôlle 31 : Géométrie complexe.

2.32 Correction Khôlle 32 : Équation dans les complexes

Retour à Khôlle 32 : Équation dans les complexes.

Exercise 2.98 (Question de cours)**.** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec l'égalité si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$. On a aussi $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ et $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.





Pour la démonstration, on mettra tout au carré et on regardera ce qui se passe.

Exercise 2.99 (Problème principal)**.** $(z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow |z+1|^n = |z-1|^n \Rightarrow |z+1| = |z-1|$ Donc le point d'affixe z est équidistant de 1 et de -1 : il est sur la verticale $\Re(z) = 0$, c'est un imaginaire pur. Ensuite, si z est solution de (E), alors on a : $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n \left((z-1)^n + (z+1)^n\right) = 0$

Pour résoudre, on constate que $(E) \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$, donc $(E) \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1], \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ *et* $z \neq 1$. Ainsi, on trouve que l'ensemble de solution : $\mathcal{S} = \left\{i\ cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right); 1 \geq k \geq n-1\right\}$

Exercise 2.100 (Question subsidiaire)**.** Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en passant simplement en forme trigonométrique (angle de moitié), on trouve bien que $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$

Réciproquement, si $|1+\lambda i| = |1-\lambda i|$, alors : $|\lambda i - (-1)| = |\lambda i - 1|$, donc $\lambda i \in i\mathbb{R}$ (λi est sur la médiatrice du segment $[-1, 1]$). Finalement $\lambda \in \mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 32 : Équation dans les complexes.

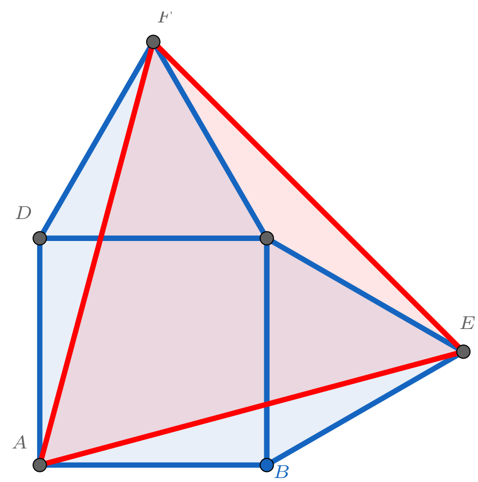
2.33 Correction Khôlle 33 : Complexes et trigonométrie

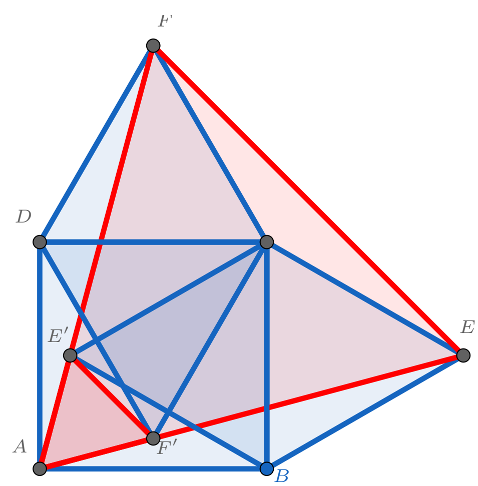
Retour à Khôlle 33 : Complexes et trigonométrie.

Exercise 2.101 (Question de cours)**. Cf cours !** Le corps $\mathbb{C}$ est dit *algébriquement clos.*

Exercise 2.102 (Problème principal)**.** On note les affixes complexes avec des minuscules pour les points correspondants en majuscule. On place le repère tel que $a = 0$. On utilise abondamment $1 + j + j^2 = 0$.

D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$: $d = ib$. De même, $c = d + b = (1 + i)b$. Ensuite, E est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{3}$: $(e - c) = -j^2(b - c)$ puis $e = b(1 + i + ij^2) = (1 - ij)b$. Pareillement : $f = d - j^2(c - d) = (i - j^2)b$.





Pour montrer que AEF est équilatéral, il suffit de montrer que $(f - a) = -j^2(e - a)$, or $-j^2e = (-j^2 + i)b = f$. Pour le triangle intérieur, on peut raisonner exactement de la même manière avec $e' = (1 - j^2 i)b$ et $f' = (1 + i - j^2)b = (i - j)b$. D'où, ici un triangle équilatéral $AF'E'$ (attention à l'orientation).

Pour calculer les aires, on utilise la formule bien connue pour un triangle équilatéral de côté de longueur l : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Donc, on a : $\mathcal{A}_{AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2+\sqrt{3})$ et $\mathcal{A}_{AF'E'} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2-\sqrt{3})$ (on prendra garde à vérifier que c'est positif !).

On remarquera aussi sur la figure que A, E' et F sont alignés, tout comme A, F' et E. Il suffit pour le montrer de voir que $\frac{f}{e'} \in \mathbb{R}$ (idem $\frac{e}{f'} \in \mathbb{R}$). En effet :

$$\frac{f}{e'} = \frac{(i-j^2)b}{(1-j^2 i)b} = \frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}+i} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

Par symétrie, on a aussi que $\frac{e}{f'} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. On en déduit une nouvelle fois que $\mathcal{A}_{AF'E'} \times (2+\sqrt{3})^2 = \mathcal{A}_{AEF}$.

Exercise 2.103 (Question subsidiaire)**.** On prendra bien évidemment le temps de vérifier que si z est dans $\mathbb{H}$, alors z' aussi ! Pour cela, on montrera que $\Im(z') = \frac{\Im(z)}{|\cos\theta - z\sin\theta|^2} \geq 0$.

La réflexivité est évidente.

La symétrie peut être obtenue en prenant $\theta' = -\theta$, on a alors $z = \frac{z'\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z'\sin\theta}$.

La transitivité est bien plus casse-pieds... Si $z \to z'$ via θ et $z' \to z''$ via θ', on a aussi (à vérifier) $z \to z''$ via $\theta'' = \theta + \theta'$. La meilleure manière de le voir est de faire une représentation matricielle.

Retour à Khôlle 33 : Complexes et trigonométrie.

2.34 Correction Khôlle 34 : Application dans les complexes

Retour à Khôlle 34 : Application dans les complexes.

Exercise 2.104 (Question de cours)**. Cf cours !** On a $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Exercise 2.105 (Problème principal)**.** Supposons l'assertion de gauche vérifiée par z_1 et z_2 fixés. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir : $|2+z_1z_2| \geq |2| - |z_1||z_2| = 1$. On est donc dans le cas d'égalité : 2 et z_1z_2 sont alignés, c'est-à-dire $z_1z_2 \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $z_2 = \frac{\lambda}{z_2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient immédiatement que $|2-\lambda| = 1$ d'où $\lambda \in \{-3, -1\}$. La première possibilité est hors de propos car elle contredit $|z_1| = |z_2|$.

La réciproque est fausse, on pourra prendre par exemple $z_1 = 2$ et $z_2 = \frac{-1}{2}$. Par contre, elle est vrai en supposant $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Exercise 2.106 (Question subsidiaire)**.** On résout déjà $\cosh(z) = 0$, on trouve $z \in i\left(\pm\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Ensuite, $\tanh z = 0$ si et seulement si $\sinh z = 0$ (et $\cosh z \neq 0$), donc si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

En écrivant $z = x+iy$ et en décomposant les exponentielles complexes, on obtient $|\tanh z| < 1 \Leftrightarrow \cos 2y > 0$. Par suite, $|\tanh z| < 1$ *et* $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in \Delta$.

Soit $z \in \Delta$. Par 1), $\tanh z$ existe, et par 3), $|\tanh z| < 1$, donc $\tanh : \Delta \to D$. Si $Z \in D$, alors $z = {}^1\!/\!_2 \ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + i \arg\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)/2$ vérifie $z \in \Delta$ et $\tanh z = Z$.

En outre, si $\tanh z = Z$ (avec $z = x + iy$ et $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{ia}$), alors $e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}$ et comme $Z \neq 1$, $2\Re\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \frac{2(1-|Z|^2)}{|1-Z|^2} > 0$. Donc $e^{2x} = r$ et $e^{2y} = e^{i\theta}$. D'après la définition de Δ, on se rend compte qu'il n'y a au plus qu'une seule solution.

Ainsi, $\tanh : \Delta \to D$ est une bijection. **Faire un dessin !**

Retour à Khôlle 34 : Application dans les complexes.

2.35 Correction Khôlle 35 : Polynôme complexe

Retour à Khôlle 35 : Polynôme complexe.

Exercise 2.107 (Question de cours)**.** **Cf cours !** Les points d'affixes a, b et c sont alignés si et seulement si $\arg(b-a) = \arg(c-a)$, ce qui revient à $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Exercise 2.108 (Problème principal)**.** Supposons $|z| > 1$, alors $|1+..+z^{n-1}| \leq |1| + ... + |z^{n-1}| \leq n|z^{n-1}|$, or $n|z^n| > n|z^{n-1}|$, donc z ne peut par être racine du polynôme.

Si $|z| = 1$, alors on a $|1 + .. + z^{n-1}| \leq n$ et $|nz^n| = n$, donc on doit être dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : tous les 1, z, z^2,..., z^{n-1} sont alignés. On en déduit que z est réel et donc que $z = \pm 1$. Il suffit maintenant de vérifier : 1 est bien racine du polynôme, mais -1 ne l'est pas.

Exercise 2.109 (Question subsidiaire)**.** On pose $S_0 = \sum \binom{3n}{3k}$, $S_1 = \sum \binom{3n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum \binom{3n}{3k+2}$. On a (avec $j^3 = 1$) :

$$\begin{aligned} 1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2 &= \sum j^k \binom{3n}{k} \\ &= (1+j)^{3n} \\ &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

De plus, $\overline{j} = j^2$, donc $0 = \Im(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = \Im(j)(S_1 - S_2)$, et on en déduit $S_1 = S_2$ (qui sont des réels). Puis $(-1)^n = \Re(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = S_0 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = S_0 - S_1$. Enfin, $S_0 + S_1 + S_2 = \sum \binom{3n}{k} = 2^{3n} (= S_0 + 2S_1)$.

Ainsi : $S_1 = S_2 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - (-1)^n\right)$ et $S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2 \times (-1)^n\right)$. On pourra prendre le temps de vérifier que ces nombres sont bien entiers.

Retour à Khôlle 35 : Polynôme complexe.

2.36 Correction Khôlle 36 : Équation du second degré

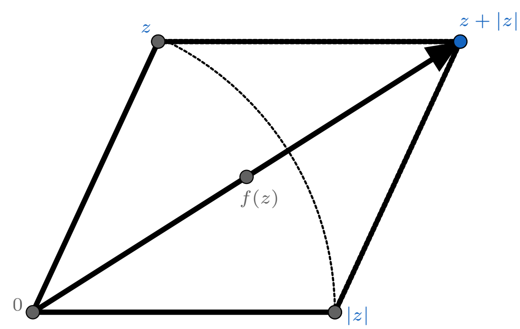
Retour à Khôlle 36 : Équation du second degré.

Exercise 2.110 (Question de cours)**. Cf cours !** L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$, c'est même un isomorphisme de $[0, 2\pi[\to \mathbb{U}$ (bien sûr, $\mathbb{R}$ et $[0, 2\pi[$ sont vus comme des groupes pour l'addition usuelle alors que $\mathbb{U}$ est un groupe pour le produit de nombres complexes).

Exercise 2.111 (Problème principal)**.** On pose $S = 1 + i$ et $P = 2 - i$. x et y sont alors les deux racines du polynôme $T^2 - ST + P$. On calcule $\Delta = S^2 - 4P = 2i - 8 + 4i = -8 + 6i = 2(-4 + 3i) = 10e^{i\theta}$ avec $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ et $\sin\theta = \frac{3}{5}$. On cherche une racine carré de Δ, par exemple : $\delta = \sqrt{10}e^{i\theta/2}$. Dès lors : $x = \frac{S+\delta}{2}$ et $y = \frac{S-\delta}{2}$.

Exercise 2.112 (Question subsidiaire)**.** On a $f(0) = 0$, et $f(\rho e^{i\theta}) = \rho \cos\frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$. Donc si $Z = re^{ia}$, alors avec $\theta = 2a$ et $\rho = \frac{r}{\cos a}$, on a $f(z) = Z$. L'application f est donc surjective.

Est-ce que f est injective ? Si $f(\rho e^{i\theta}) = f(re^{ia})$, alors $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{a}{2}\ [2\pi]$, donc $e^{i\theta} = e^{ia}$, puis $\rho = r$. f est donc injective.



Retour à Khôlle 36 : Équation du second degré.

2.37 Correction Khôlle 37 : Complexes, Binôme

Retour à Khôlle 37 : Complexes, Binôme.

Exercise 2.113 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.114 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.109.

Exercise 2.115 (Question subsidiaire)**.** Supposons que a, b et c vérifient le système. On pose $z_{a,b,c} = (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Donc, en particulier $|e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1$, donc $\left|2\cos\frac{a-b}{2}\right| = 1$, puis $(a - b) \in \left(\pm\frac{2\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Par suite, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$. On en déduit la valeur de c en ré-injectant dans l'équation de départ $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$.

L'ensemble solution est alors :

$$\mathbb{S} \subset \left\{ \left(a, a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \right) ; a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

L'inclusion inverse se vérifie rapidement.

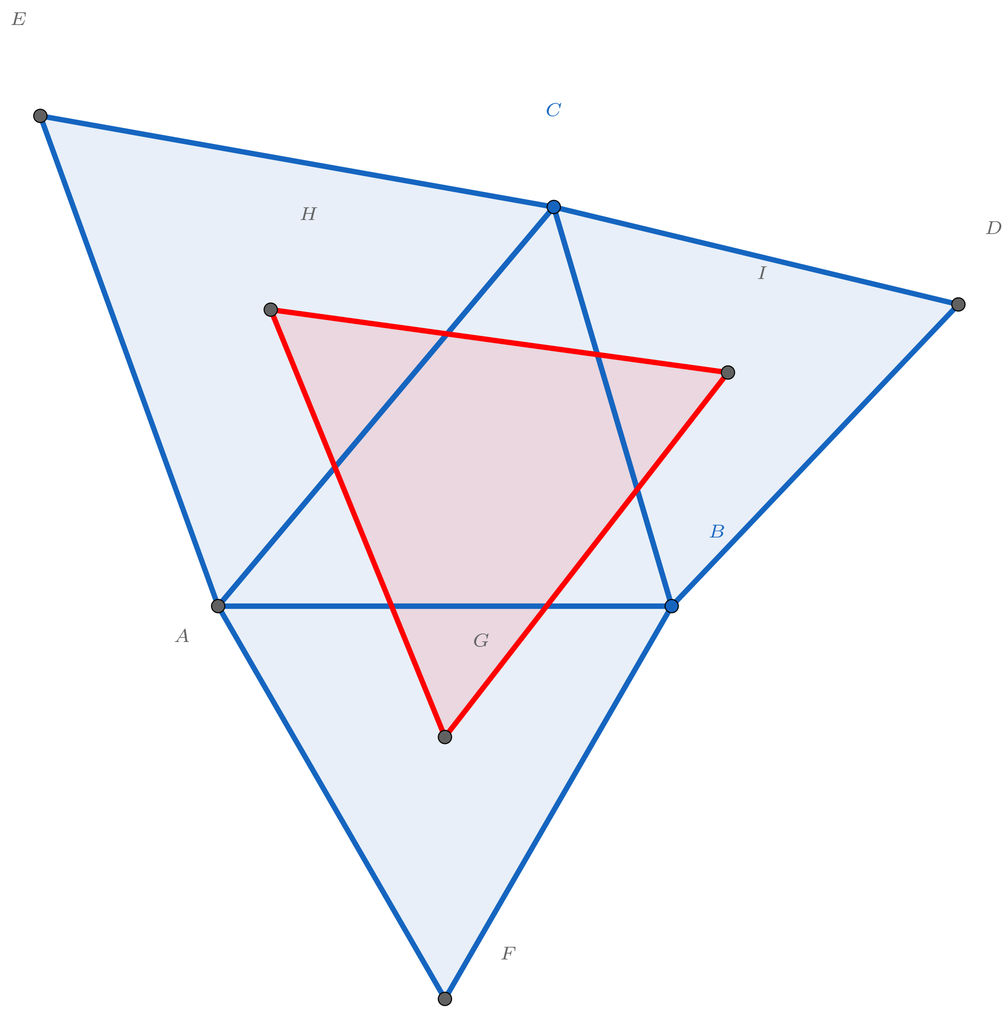
Retour à Khôlle 37 : Complexes, Binôme.

2.38 Correction Khôlle 38 : Complexe, Géométrie plane

Retour à Khôlle 38 : Complexe, Géométrie plane.

Exercise 2.116 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.117 (Problème principal)**.** On notera avec des minuscules les affixes des points correspondant en majuscule.



Comme D est le centre du triangle équilatéral CBA', B est l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$., donc (avec $j^3 = 1$ usuel) : $(d-b) = j(d-c)$. De même $(e-c) = j(e-a)$ et $(f-a) = j(f-b)$. Ainsi : $(1-j)d = b-jc$, $(1-j)e = c-ja$ et $(1-j)f = a-jb$.

On veut montrez que F est l'image de E par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{3}$ de centre D. Or $+\frac{\pi}{3}$ est l'angle de $-j^2$, avec $1+j+j^2 = 0$ (en particulier $1+j = -j^2$)

et $|-j^2| = 1$:

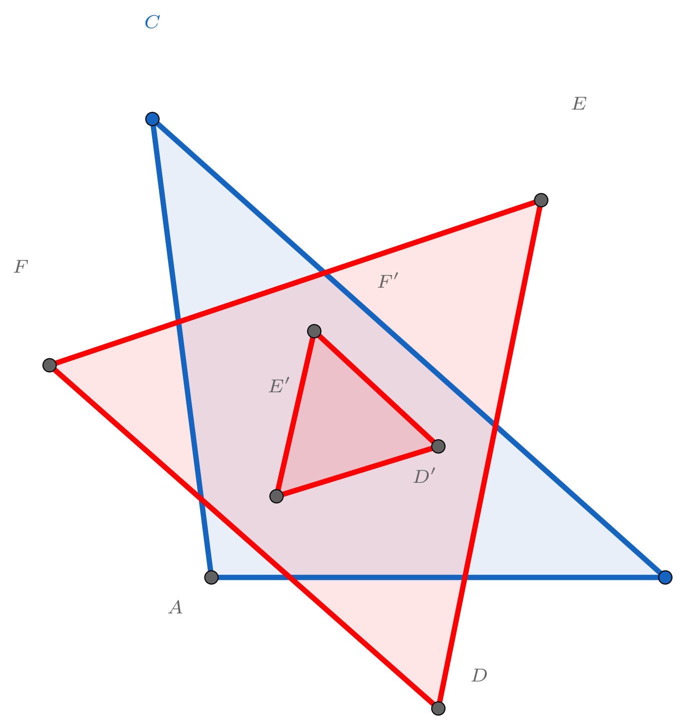
$$\begin{aligned}-j^2 \times \frac{e-d}{f-d} &= -j^2 \times \frac{c-ja-(b-jc)}{a-jb-(b-jc)} \\ &= -j^2 \times \frac{-ja-b+(1+j)c}{a-(1+j)b+jc} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, DEF est bien équilatéral. Quitte à échanger $a \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow c$ et $c \leftrightarrow a$ dans les expressions de d, e et f, on obtient immédiatement que $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ est aussi équilatéral.

Le centre de DEF est le point d'affixe : $\omega = \frac{d+e+f}{3}$. On a :

$$(1-j)\omega = \frac{(b-jc)+(c-ja)+(a-jb)}{3} = (1-j)\frac{a+b+c}{3}$$

Ainsi, les centres de ABC, DEF et $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ sont identiques.



Pour ce qui est du calcul des aires, on utilise la formule (bien connue) : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b-a|^2$ (et idem pour les autres triangles équilatéraux). On peut retrouver cette formule en regardant les hauteurs. Dès lors :

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\mathcal{A}_{DEF}-\mathcal{A}_{\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}}\right) &= (e-d)\overline{(d-e)}-(\tilde{d}-\tilde{e})\overline{(\tilde{e}-\tilde{d})}\\
&= \frac{(b-jc-c+ja)(\overline{b}-j^2\overline{c}-\overline{c}+j^2\overline{a})}{(1-j)(1-j^2)}-\frac{(c-jb-a+jc)(\overline{c}-j^2\overline{b}-\overline{a}+j^2\overline{c})}{(1-j)(1-j^2)}\\
&= 3((b-c)+j(a-c))(\overline{(b-c)}+j^2\overline{(a-c)})-3((c-a)+j(c-b))(\overline{(c-a)}+j^2\overline{(c-b)})\\
&= 3(-j+j^2)(b-c)\overline{(a-c)}+3(j-j^2)(a-c)\overline{(b-c)}\\
&= 2\times 3\sqrt{3}\Re((b-c)\overline{(a-c)})\\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\overline{\mathcal{A}}_{ABC}
\end{aligned}
$$

Finalement, la différence des aires des deux triangles équilatéraux est exactement l'aire algébrique du triangle de départ.

Exercise 2.118 (Question subsidiaire)**.** On pose $Z = z^3$ et on résout $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$. Les solutions sont $Z_0 = e^{i\theta}$ et $\overline{Z_0} = e^{-i\theta}$. De fait, les 6 solutions de l'équation de départ sont les complexes qui vérifient $z^3 = Z_0$ ou $z^3 = \overline{Z_0}$, c'est-à-dire : $\{e^{i\theta/3}; e^{-i\theta/3}; je^{i\theta/3}; je^{-i\theta/3}; j^2e^{i\theta/3}; j^2e^{-i\theta/3}\}$, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, en réunissant les racines conjuguées que $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1$ se factorise en :

$$\left(z^2-2z\cos\frac{\theta}{3}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+1\right)$$

Retour à Khôlle 38 : Complexe, Géométrie plane.

2.39 Correction Khôlle 39 : Exponentielle complexe

Retour à Khôlle 39 : Exponentielle complexe.

Exercise 2.119 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.120 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.106.

Exercise 2.121 (Question subsidiaire)**.** En écrivant $z = x + iy$, on obtient (attention, on enlèvera le point $(1, 0)$ de chacun des lieux car $z \neq 1$) :

- ($|w| = 1$) Cette condition équivaut à $(1 + x)^2 + y^2 = (1 - x)^2 + y^2$, ce qui revient à $x = 0$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.
- ($|w| = 2$) Cette condition équivaut à $(1 + x)^2 + y^2 = 4(1 - x)^2 + 4y^2$, ce qui revient à $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$. Le lieu recherché est le cercle de centre $(5/3, 0)$ et de rayon $4/3$.
- ($w \in \mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1 + z)(1 - \overline{z}) = (1 - z)(1 + \overline{z})$, puis $z = \overline{z}$, ce qui revient à $z \in \mathbb{R}$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.

- ($w \in i\mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1+z)(1-\overline{z}) = -(1-z)(1+\overline{z})$, puis $z\overline{z} = 1$, ce qui revient à $z \in \mathbb{U}$. Le lieu recherché est le cercle unité.

On pourra essayer de résoudre les premier, troisième et quatrième cas avec un point de vue purement géométrique.

Retour à Khôlle 39 : Exponentielle complexe.

2.40 Correction Khôlle 40 : Complexes, Suite récurrente

Retour à Khôlle 40 : Complexes, Suite récurrente.

Exercise 2.122 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.123 (Problème principal)**.** On oublie les cas triviaux : $z_0 = z_1$.

On a forcément $\alpha \neq 1$ car sinon la suite est arithmétique de raison $z_1 - z_0$, donc pas périodique.

On montre ensuite par récurrence que $z_n - z_0 = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(z_1 - z_0)$. Ainsi, si la suite est périodique, alors il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que $z_{n_0} = z_0$, d'où $\alpha^{n_0} = 1$, c'est-à-dire $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n (\neq \mathbb{U})$.

Réciproquement, si $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$, alors $(z_n)_n$ est bien périodique car $z_{n+n_0} - z_n = \frac{1-\alpha^{n_0}}{1-\alpha}(z_{n+1} - z_n) = 0$.

On pourra s'intéresser au cas où $(z_n)_n$ est seulement ultimement périodique $(\exists N, p, \forall n \geq N, z_{n+p} = z_n)$.

Exercise 2.124 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.103.

Retour à Khôlle 40 : Complexes, Suite récurrente.

2.41 Correction Khôlle 41 : Complexes, Racines n-ième

Retour à Khôlle 41 : Complexes, Racines n-ième.

Exercise 2.125 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.126 (Problème principal)**.** Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\overline{1+iz} = 1 - iz$, donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = 2\arg(1+iz) = 2\arctan z$. Donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$. On en déduit que $|A| = 1$, puis qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = e^{ia}$.

Réciproquement, si $A = e^{ia}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est $z = -i\frac{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}+1} = \tan\frac{a+2k\pi}{2n}e$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Ainsi, la CNS pour que l'équation n'admette que des solutions réelles est $A \in \mathbb{U}$.

Soit a tel que $a^n = A$, on a alors les racines n-ième de A : $\{a_k := ae^{i\frac{2k\pi}{n}} ; 0 \leq k \leq n-1\}$. On résout maintenant : $1 + iz = a_k(1 - iz)$. On trouve $z = -i\frac{a_k-1}{a_k+1}$

Exercise 2.127 (Question subsidiaire)**.** On pose $Z = z^3$ et on résout $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$. Les solutions sont $Z_0 = e^{i\theta}$ et $\overline{Z_0} = e^{-i\theta}$. De fait, les 6 solutions de l'équation de départ sont les complexes qui vérifient $z^3 = Z_0$ ou $z^3 = \overline{Z_0}$, c'est-à-dire : $\{e^{i\theta/3}; e^{-i\theta/3}; je^{i\theta/3}; je^{-i\theta/3}; j^2e^{i\theta/3}; j^2e^{-i\theta/3}\}$, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, en réunissant les racines conjuguées que $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1$ se factorise en :

$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + 1\right)$$

Retour à Khôlle 41 : Complexes, Racines n-ième.

2.42 Correction Khôlle 42 : Complexes, Géométrie plane

Retour à Khôlle 42 : Complexes, Géométrie plane.

Exercise 2.128 (Question de cours)**. Cf cours !**

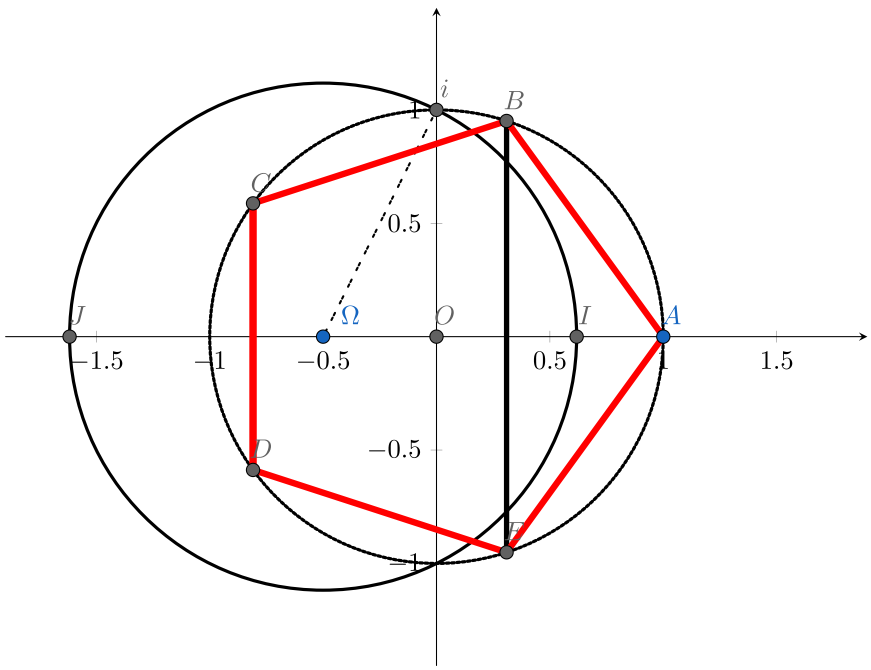
Exercise 2.129 (Problème principal)**.** On a $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. En notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, on sait que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, donc $a + b = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$. En outre, $ab = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 = -1$ grâce à $\omega^5 = 1$. Ainsi, a et b sont les racines de $X^2 + X - 1$, c'est-à-dire : $\{a, b\} = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $a > 0$, d'où :

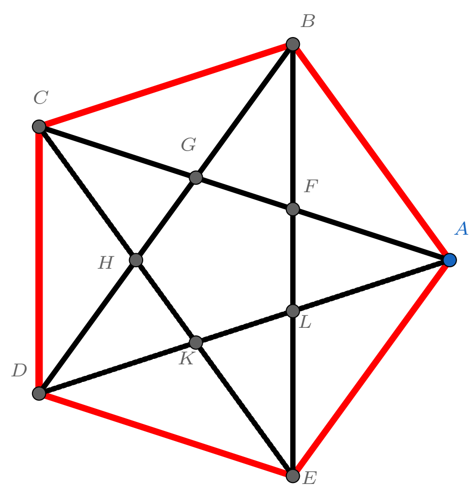
$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

On obtient :

x	$\pi/5$	$2\pi/5$	$4\pi/5$
$\cos x$	$1/4(1+\sqrt{5})$	$1/4(-1+\sqrt{5})$	$1/4(-1-\sqrt{5})$
$\sin x$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$1/4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \Omega M)$ a pour rayon $|\Omega M| = |-1/2 - i| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Comme Ω est déjà su l'axe des abscisses, on en déduit : $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. Ainsi, pour construire le pentagone régulier, il suffit de tracer $\mathcal{C}(O, 1)$, puis les médiatrices de $[O, I]$ et $[O, J]$, ce qui nous donne 4 sommets du pentagone, le cinquième étant le point d'affixe 1.





Pour calculer $\frac{AF}{AC}$, on peut utiliser le théorème de Thalès. On appelle $FGHKL$ le pentagone intérieur. Alors, si on regarde AFL et ACD, on obtient $\frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD}$. Puis, en regardant KCD et KBE, on obtient $\frac{KC}{KE} = \frac{CD}{BE}$. Enfin, avec les égalités de longueur $BE = AC$, $KC = AF$, $KE = CF$ et $FL = FG$, on peut poser

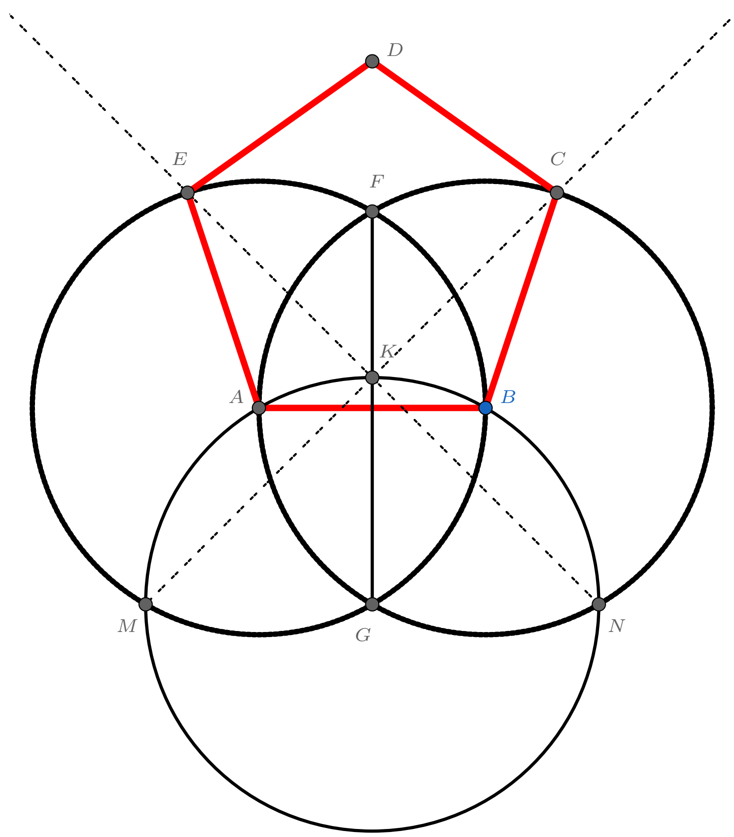
$x = \frac{AF}{AC}$ et on a :

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD} = FG \times \left(\frac{BE \times AF}{FC} \right)^{-1} = \frac{(1-2x)(1-x)}{1 \times x}$$

(À la dernière étape, on a divisé en haut et en bas par AC^2.) D'où $x^2 - 3x + 1 = 0$ puis $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (car $x < 1$).

On procède de même pour $y = \frac{FG}{AF}$. On a $y = \frac{1-2x}{x}$ en divisant en haut et en bas par AC. D'où finalement le nombre d'or : $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercise 2.130 (Question subsidiaire)**.** On commence par tracer la figure et poser quelques noms.



Le plus efficace est de placer l'origine du repère au milieu du segment $[A, B]$. On note par des minuscules les affixes complexes des points en majuscules et i et j les nombres complexes usuels ($i^2 = -1$, $j^3 = 1$).

On sait, par construction que les segments rouges ont tous la même longueur. Néanmoins, il convient de mesurer l'angle entre eux, au niveau de B par exemple. On veut donc les affixes de A, B et C. Soit l la longueur du segment rouge $[A, B]$. On a immédiatement, dans notre repère : $a = -{}^1\!/\!_2 l$ et $b = +{}^1\!/\!_2 l$.

Reste c... En raisonnant avec les triangles équilatéraux AGB puis AMG, on obtient $g = -{}^{\sqrt{3}}\!/\!_2 li$ et $m = g - -j^2(a-g) = -lj$. K est à la verticale de G à une distance l : $k = (1 - {}^{\sqrt{3}}\!/\!_2)\, l$. Ainsi, comme C est sur la droite (MK), on a d'une part l'existence d'un réel t tel que

$$\frac{c}{l} = k + t(k-m) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

En outre, C est à une distance l de B :

$$|c-b|^2 = l^2 \quad \text{puis} \quad \left|\frac{c}{l} - \frac{1}{2}\right|^2 = 1$$

En remplaçant, on obtient que t vérifie :

$$(15 - 6\sqrt{3})t^2 + 4(3 - 2\sqrt{3})t - 2\sqrt{3} = 0$$

Ainsi, on trouve 2 valeurs de t possibles, on sait qu'on veut la plus élevée étant donné l'endroit où on souhaite que soit le point C : $t = \frac{-2(3-2\sqrt{3})+\sqrt{48-18\sqrt{3}}}{15-6\sqrt{3}}$.

On a tous le matériel pour conclure : on veut que $\frac{c-b}{a-b} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$. Ce qui nous donne :

$$-e^{i\frac{3\pi}{5}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

On peut comparer (avec une calculatrice) $\frac{\Im(z)}{\Re(z)}$ des deux membres, c'est-à-dire la tan dans l'angle en question. On trouve un angle correspondant de $109.0278°$ au lieu des $108°$ attendus, soit $0,95\%$ d'erreur relative.

Retour à Khôlle 42 : Complexes, Géométrie plane.

2.43 Correction Khôlle 43 : Sommes via une suite d'intégrales

Retour à Khôlle 43 : Sommes via une suite d'intégrales.

Exercise 2.131 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.132 (Problème principal)**.** $I_0 = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = [-\ln\cos(x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

On remarque que $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\left(1 + \tan^2(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit déjà que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $I_n \geq 0$, donc $0 \leq I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La formule explicite est plus compliquée à obtenir. Le plus rapide est de regarder la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = ... = I_0 - (-1)^n I_{2n}$$

Donc $I_{2n} = (-1)^n(\frac{\pi}{4} - v_n)$. On a de même $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - u_n)$ en calculant $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$.

Finalement, comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercise 2.133 (Question subsidiaire)**.** On pose F une primitive de $t \mapsto tg(t)$ et G une de $t \mapsto g(t)$. On a alors $g(x) = xG(x) - xG(0) - F(x) + F(0) + f(x)$.

En dérivant deux fois, on obtient que g est solution au problème de Cauchy $g''(x) - g(x) = f''(x)$ et $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. De fait, si une solution existe, alors elle est unique (attention, elle n'existe pas forcément).

Les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{-x} + \mu e^{x}$, donc pour $f = \cos$, on obtient $g'' - g = -\cos$, puis $g(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{x} + \frac{1}{2}\cos x$. Avec les conditions initiales, on trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$.

Retour à Khôlle 43 : Sommes via une suite d'intégrales.

2.44 Correction Khôlle 44 : Fonction définie par une intégrale

Retour à Khôlle 44 : Fonction définie par une intégrale.

Exercise 2.134 (Question de cours)**.** Soit une équation différentielle linéaire homogène $\varphi(y, y', y', ..., x) = 0$. Soit y_1 tel que $\varphi(y_1, y_1', ..., x) = a(x)$ et y_2 tel que $\varphi(y_2, y_2', ..., x) = b(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(y_1 + \lambda y_2, y_1' + \lambda y_2', ..., x) = a(x) + \lambda b(x)$. Ainsi, si on cherche à résoudre une équation différentielle dans laquelle le membre de droite se sépare en une somme de fonction, on peut trouver une solution particulière séparément pour chaque terme, et sommer pour obtenir une solution particulière à notre équation.

Exercise 2.135 (Problème principal)**.** Comme φ est continue (une justification basique de la limite en 0 est attendue tant que le cours de continuité n'a pas été vu), elle possède une primitive Φ qui s'annule en 0. On a : $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, elle est bien définie.

En outre, comme φ est paire, Φ est impaire (cela se démontre par changement de variable $u = -t$). De fait, f est impaire comme somme de fonctions impaires. Φ est dérivable (sa dérivée est φ), donc f aussi et on a :

$$f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\sinh(2x) - \sinh(x)}{x}$$

Comme sinh est croissante, on a $\sinh(2x) - \sinh(x) > 0$ si et seulement si $2x > x$ et donc $x > 0$. Ainsi, on a $f'(0) = 0 (= \varphi(2 * 0) - \varphi(0))$ (limites par taux d'accroissement) et sinon $f'(x) > 0$. Finalement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		0		$+\infty$

On constate que $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$ en développant les exponentielles, d'où les limites indiquées.

Exercise 2.136 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, on a $u' = -i\omega u$, puis :

$$u = u_0 e^{i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t) + i\,(x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t)$$

Ainsi, on obtient en intégrant :

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) - \frac{y'(0)}{\omega}$$

Et :

$$y(t) = -\frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t + y(0) + \frac{x'(0)}{\omega}$$

L'équation sur z s'intègre indépendamment en $z(t) = z'(0)t + z(0)$.

Retour à Khôlle 44 : Fonction définie par une intégrale.

2.45 Correction Khôlle 45 : Inégalité de Young généralisée

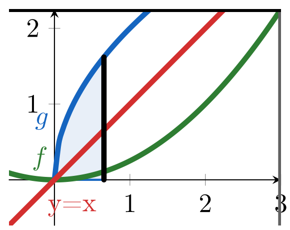
Retour à Khôlle 45 : Inégalité de Young généralisée.

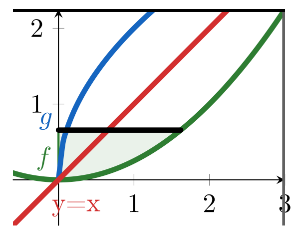
Exercise 2.137 (Question de cours)**.** Cela correspond au problème de Cauchy : si deux courbes intégrales se croisent, disons en (x_0, y_0), alors ces deux courbes sont solutions de l'équation linéaire du premier ordre (avec $a(x)$ qui ne s'annule pas) et vérifient $y(x_0) = y_0$, on a donc un problème de Cauchy. Par unicité de la solution, les deux courbes sont identiques.

Réciproquement, tout point (x_0, y_0) du plan admet une courbe intégrale qui y passe, celle qui est solution du problème de Cauchy formé de l'équation de départ et de la condition $y(x_0) = y_0$.

Exercise 2.138 (Problème principal)**.** On notera que f^{-1} est bien continue (cours sur la continuité), donc les calculs demandés sont valides.

On constate le l'égalité des aires bleues et vertes sur le dessin, par symétrie ($g = f^{-1}$ et $a = 3$) :



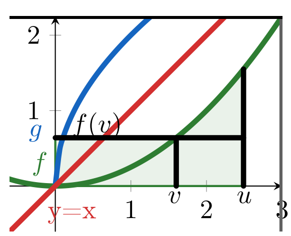


L'aire bleue valant $\int_0^{f(x)} g$, on a immédiatement la première égalité : $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x)$. Démontrons-là par le calcul.

On pose F la primitive de f qui s'annule en 0, $\tilde{F}$ celle de f^{-1} (attention, ce n'est absolument pas F^{-1}, et F n'a pas de raison d'être même bijective), et $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t$. G est bien définie et dérivable avec : $G(x) = F(x) + \tilde{F}(f(x))$, donc $G'(x) = F'(x) + f(x) \times \tilde{F}'(f(x)) = f(x) + f(x) \times f^{-1}(f(x)) = f(x) + xf'(x)$. On constate que c'est la même dérivée que pour $x \mapsto xf(x)$, et qu'elle coïncident en 0.

$\star$ Supposons que $f^{-1}(v) \leq u$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = vf^{-1}(v) + \int_{f^{-1}(v)}^u f \geq vf^{-1}(v) + v(u - f^{-1}(v)) = uv$$



$\star$ Supposons que $v \geq f(u)$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f^{-1} :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = uf(u) + \int_{f(u)}^v f^{-1} \geq uf(u) + u(v - f(u)) = uv$$

Exercise 2.139 (Question subsidiaire)**.** on pose $f : t \mapsto t^{p-1}$ et $g : x \mapsto x^{q-1}$. On a $g(f(t)) = g(t^{p-1}) = t^{(p-1)(q-1)} = t$. En effet, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$, donc par hypothèse $pq = p + q$. Finalement : $g = f^{-1}$. En appliquant l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Young :

$$uv \leq \int_0^u t^{p-1}\ \mathrm{d}t + \int_0^v t^{q-1}\ \mathrm{d}t = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Retour à Khôlle 45 : Inégalité de Young généralisée.

2.46 Correction Khôlle 46 : Primitive de $\ln^n$, Règles de Biot

Retour à Khôlle 46 : Primitive de $\ln^n$, Règles de Biot.

Exercise 2.140 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.141 (Problème principal)**.** Intégration par parties : $\int \ln^n = [x \ln^n x] - n \int \ln^{n-1}$. De fait :

$$\int \ln^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}$$

Exercise 2.142 (Question subsidiaire)**.** On pose le changement de variables (bijectif) $u = \frac{\pi}{4} - t$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos t \, \mathrm{d}t = -\int_{\pi/4}^{0} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \left[\ln(\sin t + \cos t) - \ln\cos t\right] \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \left[\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) - \ln\cos t\right] \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln 2 \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 46 : Primitive de $\ln^n$, Règles de Biot.

2.47 Correction Khôlle 47 : Intégrale d'une fraction trigonométrique

Retour à Khôlle 47 : Intégrale d'une fraction trigonométrique.

Exercise 2.143 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.144 (Problème principal)**.** On a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t + \cos t}{\cos t + \sin t} \mathrm{d}t = \left[\ln\left(\cos t + \sin t\right)\right]_0^{\pi/2} = 0$. Ainsi, $I = J = \frac{\pi}{4}$.

On pose $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$. On effectue le changement de variables $t = \sin u$ ($\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$) qui est bijectif pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dès lors, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)\mathrm{d}u}{|\cos u| + \sin(u)} = I = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 2.145 (Question subsidiaire)**.** Soit F la primitive de f : $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. On a $F(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Or $F' = f$, donc $f = 0$, d'après le théorème principal de l'intégration.

Autre méthode : On peut, *si on a vu le chapitre de théorie de l'intégration (pas seulement celui de calcul)*, utiliser le fait que, pour f continue par morceau, si on suppose $f \neq 0$, alors il existe un point x tel que $f(x) \neq 0$, et un voisinage de x sur lequel f garde un même signe et ne s'annule pas. En intégrant sur cet intervalle, on obtient une valeur non nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Retour à Khôlle 47 : Intégrale d'une fraction trigonométrique.

2.48 Correction Khôlle 48 : Intégrale à 4 paramètres

Retour à Khôlle 48 : Intégrale à 4 paramètres.

Exercise 2.146 (Question de cours)**.** Pour résoudre une telle équation, on commencera par résoudre sur chaque intervalle ou a ne s'annule pas. Ensuite, on essayera de recoller les solutions aux points où a s'annule de sorte à ce que la solution soit $\mathcal{C}^1$ (ou simplement dérivable selon ce que l'on souhaite). Regarder l'équation au point d'annulation de a donne la valeur de la solution en ce point. On essaye ensuite d'appliquer la continuité en ce point, puis la continue dérivabilité pour trouver les constantes qui fonctionnent. (Assez souvent, on se rend compte que $x \mapsto 0$ est la seule solution, malheureusement...)

Exercise 2.147 (Problème principal)**.** On se rappelle que $\int t^n \, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]$.

On effectue le changement de variables $u = t - \alpha$ ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $I_{p,q}(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta-\alpha} u^p (u - (\beta-\alpha))^q \mathrm{d}u = I_{p,q}(0, \beta-\alpha)$. Donc, on se bornera à étudier $I_{p,q}(0, x)$.

Ensuite, en posant $u = xv$ ($\mathrm{d}u = x\mathrm{d}v$), on a $I_{p,q}(0,x) = x^{p+q+1} \int_0^1 v^p (v-1)^q \mathrm{d}v = x^{p+q+1} I_{p,q}(0,1)$.

On va maintenant faire une IPP pour calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (t-1)^q \mathrm{d}t$. On pose $u' = t^p$ et $v = (t-1)^q$, on a $u = \frac{1}{p+1} t^{p+1}$ et $v' = q(t-1)^{q-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} (t-1)^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (t-1)^{q-1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{-q}{p+1} I_{p+1,q-1} \\
&= (-1)^q \left(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{q-k}{p+1+k}\right) I_{p+q,0} \\
&= (-1)^q \frac{q!p!}{(p+q)!} \frac{1}{p+q+1} \\
&= \frac{(-1)^q}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}$$

Finalement, $I_{p,q}(\alpha, \beta) = \frac{(-1)^q (\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$.

Remark. On a $I_{p,q} = (-1)^q I_{q,p}$. On peut le vérifier en posant le changement de variable $u = 1 - t$.

Exercise 2.148 (Question subsidiaire)**.** On sait que les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc pour un réel x fixé :

$$\begin{aligned} g(x+T) - g(x) &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT} - 1) + e^{-a(x+T)} \left(\int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} e^{at} f(t)\mathrm{d}t \right) - e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT} - 1) + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a effectué un changement de variable dans la seconde intégrale avec $u = t - T$.

Ainsi, g est T périodique si et seulement si $\lambda = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t$. Cette constante existe car $a \neq 0$ et $T \neq 0$. Finalement :

$$g(x) = \left(\frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t \right) e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t$$

Retour à Khôlle 48 : Intégrale à 4 paramètres.

2.49 Correction Khôlle 49 : Action de groupe

Retour à Khôlle 49 : Action de groupe.

Exercise 2.149 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.150 (Problème principal)**.** φ définit ce qu'on appelle une action de G sur X.

1. On a $x \sim_G x$ car $\varphi(x, e) = x$.
2. Si $x \sim_G y$, alors il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g, x)$. Dans ce cas, on a $\varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \star g, x) = \varphi(e, x) = x$, d'où la symétrie.
3. Si $x \sim_G y$ et $y \sim_G z$, alors soit $g, h \in G$ tels que $y = \varphi(g, x)$ et $z = \varphi(h, y)$, alors $\varphi(h \star g, x) = \varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(h, y) = z$. Ainsi $\sim_G$ est transitif.

On a bien une relation d'équivalence.

En réalité, on connaît déjà plein d'actions de groupe. Par exemple, l'action du groupe des rotations de l'espace qui laisse inchangé un cube ou un tétraèdre sur les sommets de ce dernier ; ou l'action du groupe des permutations sur $[\![1, n]\!]$; ou l'action du groupe des translation (ou de quelque transformations géométriques que ce soit) sur les points du plan.

Exercise 2.151 (Question subsidiaire)**.** On peut soit utiliser les expressions trigonométriques, soit les nombres complexes afin de développer le $\sin(x-t)$. Le but est de ne plus avoir de x dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(\frac{e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)}}{2i}\right) g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f est donc bien définie et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix}\times\frac{g(x)}{e^{ix}}\right) - \frac{1}{2i}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix}\times e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \cos(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Non seulement on a l'expression souhaitée, mais en plus on constate qu'on peu facilement calculer la dérivée seconde par le même procédé (en repartant de l'avant dernière ligne) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix}\times\frac{g(x)}{e^{ix}}\right) + \frac{1}{2}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix}\times e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{2}{2}g(x) - \left(\frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= g(x) - \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy : $f'' + f = g$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

On sait désormais résoudre entièrement cette équation car on vient d'en exhiber une solutions particulière. Les solutions sont exactement les fonctions y telles que :

$$\exists\lambda,\mu,\forall x, y(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin x + f(x)$$

Pour résoudre le problème de Cauchy associé avec $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$, par exemple, il faut et il suffit de prendre $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta$.

Retour à Khôlle 49 : Action de groupe.

2.50 Correction Khôlle 50 : Sous-groupe distingué

Retour à Khôlle 50 : Sous-groupe distingué.

Exercise 2.152 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.153 (Problème principal)**.** On doit montrez que $\forall g \in G, x \in \text{Ker } \varphi, g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Or, on a avec ces notations :

$$\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(x)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_H$$

On a utilisé $\varphi(x) = e_H$. Ainsi, $g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Ker φ est bien distingué dans G car c'est un sous-groupe de G stable par conjugaison.

Exercise 2.154 (Question subsidiaire)**.** Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation revient à $\left(\frac{e^x}{x}y\right)' = xe^x$. Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation revient à $(-xe^{-x}y)' = x^3e^{-x}$. On résout alors le problème de la solution particulière en la cherchant de la forme polynôme (de degré 3)$\times e^{-x}$. Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{\mu e^x + 6}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Si on souhaite effectué un recollement $\mathcal{C}^1$, on se rend compte (continuité) qu'il faut que $y(0) = 0$ et par suite $\mu = -6$. En outre, on a les dérivées à gauche et à droite de 0 : $-1 + \lambda$ et $3 + (-6) \times \frac{1}{2} = 0$. Ainsi, $\lambda = 1$ est la seule possibilité. Il existe donc une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour cette équation :

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + xe^x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 6 - 6\frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Retour à Khôlle 50 : Sous-groupe distingué.

2.51 Correction Khôlle 51 : Moyenne harmonique

Retour à Khôlle 51 : Moyenne harmonique.

Exercise 2.155 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.156 (Problème principal)**.** Il s'agit de la moyenne harmonique : $\frac{1}{x \star y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

La loi est interne (car $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ pour $x, y > 1$), commutative, d'élément neutre 0, d'inverse $-x$, et associative car :

$$\frac{1}{(x \star y) \star z} = \frac{1}{x \star y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

La dernière expression est symétrique en x, y, z donc la loi est associative. On a bien un groupe abélien.

On peut faire de même avec la moyenne (arithmétique) : $x \star y = \frac{x+y}{2}$; la moyenne géométrique : $x \star y = \sqrt{xy}$; la moyenne quadratique : $x \star y = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$; et la moyenne arithmético-géométrique.

Exercise 2.157 (Question subsidiaire)**.** On sait que les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\mathrm{d}t \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$$

Donc pour un réel x fixé :

$$\begin{aligned} g(x+T) - g(x) &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT}-1) + e^{-a(x+T)}\left(\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} e^{at}f(t)\mathrm{d}t\right) - e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT}-1) + e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a effectué un changement de variable dans la seconde intégrale avec $u = t - T$.

Ainsi, g est T périodique si et seulement si $\lambda = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t$. Cette constante existe car $a \neq 0$ et $T \neq 0$. Finalement :

$$g(x) = \left(\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t\right)e^{-ax} + e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\mathrm{d}t$$

Retour à Khôlle 51 : Moyenne harmonique.

2.52 Correction Khôlle 52 : Avant l'addition

Retour à Khôlle 52 : Avant l'addition.

Exercise 2.158 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.159 (Problème principal)**.** On note cette nouvelle loi $\heartsuit$. On veut calculer $x\heartsuit y$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. **Attention, $\heartsuit$ n'est pas associative.** On considère que $((...(x\heartsuit x)\heartsuit x)...\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$ où n est le nombre d'occurrences de x dans le membre de gauche.

Dès lors, $x\heartsuit x = x+2$, puis $(x+2)\heartsuit x = (x\heartsuit x)\heartsuit x = x+3$, et ainsi de suite : $(x+k)\heartsuit x = x+(k+1)$ pour $k \geq 2$.

On connaît déjà beaucoup de valeurs de $x\heartsuit y$, on peut conjecturer une formule générale, par exemple : $x\heartsuit y = \max(x,y)+1$. Cela fonctionne : $((...(x\heartsuit x)\heartsuit x)...\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$ est bien vérifié. La loi ainsi définie est commutative mais pas associative (car $0\heartsuit(0\heartsuit 3) = 0\heartsuit 4 = 5$ alors que $(0\heartsuit 0)\heartsuit 3 = 2\heartsuit 3 = 4$). Il n'y a pas d'élément neutre.

On aurait pu faire d'autres choix pour une loi générale, par contre, elle n'aurait pas été associative, car sinon, on aurait pu écrire : $x = 1\heartsuit 1\heartsuit ...\heartsuit 1$ avec $x-1$ fois 1 ; puis $x\heartsuit x = (1\heartsuit ...\heartsuit 1)\heartsuit(1\heartsuit ...\heartsuit 1) = 1+(x-1)+(x-1) \neq x+2$, en se débarrassant des parenthèse grâce à l'associativité.

Il ne peut pas non plus y avoir d'élément neutre (ni à droite, ni à gauche) car sinon $e\heartsuit e = e$. Or on sait que $x\heartsuit x = x+2 \neq x$ pour tout x. (La recherche d'inverse est hors de propos.)

Reste la commutativité : peut-on définir des lois qui respectent $((\dots(x\heartsuit x)\heartsuit x)\dots\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$ et qui ne soient pas commutatives ? Oui, on peut par exemple simplement prendre 0 pour toutes les valeurs de $x\heartsuit y$ qui ne sont pas imposées par la règle (à savoir $(x+1)\heartsuit x = 0$ et $x\heartsuit y = 0$ pour $y < x$). Cela donne une opération qui "précède l'addition" et qui n'est pas commutative.

Exercise 2.160 (Question subsidiaire)**.** On pose $(E) : a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x) = 0$ d'inconnue la fonction y. En posant z tel que $y = z.y_0$, on a :

$$\begin{aligned} ay''+by'+cy &= a(z.y_0)'' && +b(z.y_0)' && +cz.y_0 \\ &= a(z''.y_0+2z'.y_0'+z.y_0'') && +b(z'.y_0+z.y_0') && +cz.y_0 \\ &= (ay_0)z''+(2ay_0'+by_0)z'+(ay_0''+by_0'+cy_0)z \end{aligned}$$

Comme y_0 est solution, on obtient donc que z' vérifie l'équation linéaire en f du premier ordre : $a(x)y_0(x)f'(x)+(2a(x)y_0'(x)+b(x)y_0(x))f = 0$. Ce qu'on sait résoudre !

Retour à Khôlle 52 : Avant l'addition.

2.53 Correction Khôlle 53 : Partition en deux copies d'un sous-groupe

Retour à Khôlle 53 : Partition en deux copies d'un sous-groupe.

Exercise 2.161 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.162 (Problème principal)**.** On doit montrer que $\forall x \in G, h \in H, xhx^{-1} \in H$. On fixe $g \in G$ tel que $H \cup gH = G$ et $H \cap gH = \emptyset$.

Si $x \in H$, alors on a évidement $xhx^{-1} \in H$ car H est un groupe. Sinon, il existe $h' \in H$ tel que $x = gh'$. On a alors :

$$xhx^{-1} = gh'hh'^{-1}g^{-1}$$

Or, si le dernier élément appartient à gH, alors il exite $h'' \in H$ tel que : $gh'hh'^{-1}g^{-1} = gh''$; d'où : $g = \left(h''\left(h'hh'^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \in H$. Or cela est impossible car $g = g.e \in gH$ et $gH \cap H = \emptyset$. Ainsi, $gh'hh'^{-1}g^{-1} \in H$, et finalement H est distingué dans G.

Exercise 2.163 (Question subsidiaire)**.** Si y est solution de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2y'y - y^2\frac{q'}{q^2} + 2y'y''\frac{1}{q} \\ &= -y'^2\frac{q'}{q^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Par suite, z est une fonction positive et décroissante au voisinage de $+\infty$: elle y est bornée. L'inégalité $\forall x \geq A, 0 \leq y^2(x) \leq z(x)$ prouve alors que y est bornée au voisinage de $+\infty$.

Retour à Khôlle 53 : Partition en deux copies d'un sous-groupe.

2.54 Correction Khôlle 54 : Loi exponentielle

Retour à Khôlle 54 : Loi exponentielle.

Exercise 2.164 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.165 (Problème principal)**.** La loi est :

1. Interne : c'est évident.
2. Associative : $[(x,y)\star(z,t)]\star(u,v) = (x+z+u, (ye^z+te^{-x})e^u+ve^{-x-z}) = (x+z+u, ye^{z+u}+(te^u+ve^{-z})e^{-x}) = (x,y)\star[(z,t)\star(u,v)]$
3. Élément neutre : $(0,0)$, il suffit de vérifier.
4. Inverse : $(x,y)^{-1} = (-x,-y)$, il suffit de vérifier.
5. (Non-)commutative : $(0,1)\star(1,0) = (1,e^{-1})$ alors que $(0,1)\star(1,0) = (1,e^{+1})$.

On obtient bien un groupe non-abélien.

Si $\{(x,f(x); x\in\mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour cette loi, avec f dérivable, alors :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^{-x}$$

On en déduit tout d'abord que $f(0) = 0$ (car $f(x+0) = f(x)\times 1 + f(0)e^{-x}$ pour tout x). Ensuite, si on dérive par rapport à y, on obtient :

$$\forall x,y, f'(x+y) = f(x)e^y + f'(y)e^{-x}$$

En particulier, en $y=0$: $f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}$. Cela veut dire que f est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = \mu \\ f' - f = \mu e^{-x} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'existence de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x - \frac{\mu}{2}e^{-x}$. D'après la condition initiale, on a : $2\lambda - \mu = 0$.

Réciproquement, toute les fonctions $g : x\mapsto \alpha\sinh x$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, vérifient $\forall x,y, g(x+y) = g(x)e^y + g(y)e^{-x}$, et donc $\{(x,g(x); x\in\mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour $\star$.

Exercise 2.166 (Question subsidiaire)**.** On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et (I, f) l'unique solution maximale associée. Si $y_0 = 0$, alors la solution $f = 0$ et $I = \mathbb{R}$ convient, et par unicité, on a $(I, f) = (\mathbb{R}, x \mapsto 0)$. On se place du coup dans le cas ou f ne s'annule pas sur I :

$$\frac{f'}{f} - \frac{1}{f} = x^2$$

Dès lors, $g = {}^1\!/_f$ vérifie $g' + g = x^2$. En intégrant, il existe $\lambda : g(x) = \lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2$. Or on a aussi $g(x_0) = {}^1\!/_{y_0}$, donc $\lambda = e^{x_0}\left(\frac{1}{y_0} + x_0^2 - 2x_0 + 2\right)$.

Finalement, $f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$ sur le plus grand intervalle (contenant x_0) sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.

Ce raisonnement permet de traiter les équations différentielles, dites de Bernoulli, de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^n$.

Retour à Khôlle 54 : Loi exponentielle.

2.55 Correction Khôlle 55 : Groupe 2-couvrant, Densité par la moyenne

Retour à Khôlle 55 : Groupe 2-couvrant, Densité par la moyenne.

Exercise 2.167 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.168 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.162.

Exercise 2.169 (Question subsidiaire)**.** Soient $x < y \in \mathbb{R}$. On peut trouver $a, b \in A$ tels que $a < x < y < b$. On pose les suites réelles $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(m_n)_n$ définies ainsi : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour n fixé, soit $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, si $m_n < x$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$, si $m_n > y$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, si $m_n \in [x, y]$, on s'arrête. Grâce à la propriété de moyennage de A, on sait que $\forall n, a_n, b_n, m_n \in A$. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}, m_N \in [x, y]$.

Raisonnons par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors $\forall n, a_n, b_n \notin [x, y]$. De fait, la récurrence garantit que $a_n < x < y < b_n$, donc $0 < y - x < b_n - a_n$. Or $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \to 0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, il existe un N tel que $m_N \in [x, y]$, donc $A \cap [x, y] \neq \emptyset$.

Retour à Khôlle 55 : Groupe 2-couvrant, Densité par la moyenne.

2.56 Correction Khôlle 56 : Morphisme de corps

Retour à Khôlle 56 : Morphisme de corps.

Exercise 2.170 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.171 (Problème principal)**.** Le noyau d'un morphisme de corps $\sigma : k \to K$ est un groupe car un morphisme de corps est en particulier un morphisme de groupes (additifs). En outre, soit $\alpha \in k$ et $x \in \operatorname{Ker} \sigma$, alors $\sigma(\alpha x) = \sigma(\alpha)\sigma(x) = 0_K$ car σ est multiplicative sur le corps k. Donc $\operatorname{Ker} \sigma$ est un idéal de k.

Soit $I \subset k$ un idéal. Si $1_k \in I$, alors $I = k$ car $\alpha \times 1_k \in I$ pour tout $\alpha \in k$. Mais si $x \neq 0_k \in I$, alors $x^{-1} \in k$ car k est un corps, donc $x^{-1} \times x = 1 \in I$, puis $I = k$ comme on vient de le montrer. Ainsi si $I \neq k$, alors $I \subset \{0_k\}$, donc $I = \{0_k\}$ car I est non vide.

Si σ est un morphisme de corps non-nul, alors $\operatorname{Ker} \sigma \neq k$ est un idéal de k, c'est donc l'idéal nul par le raisonnement précédent. Dès lors, σ est (en particulier) un morphisme de groupe de noyau nul : σ est injectif. En outre, son image $\sigma(k) \subset K$ est un corps, donc un sous-corps de K. Ainsi, σ définit un isomorphisme de corps de k vers un sous-corps de K.

Exercise 2.172 (Question subsidiaire)**.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Comme $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, puis (toujours par stricte croissance ce la racine cubique) : $x < r^3 < y$. Ainsi, l'ensemble $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 56 : Morphisme de corps.

2.57 Correction Khôlle 57 : Loi exponentielle, Irrationalité de e

Retour à Khôlle 57 : Loi exponentielle, Irrationalité de e.

Exercise 2.173 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.174 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.165.

Exercise 2.175 (Question subsidiaire)**.** On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité $e = \sum_0^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$ est évidente ($e = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t$).

Supposons l'égalité vérifiée pour un n donné. Dans ce cas, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 - (-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient l'égalité souhaitée.

Ainsi : $0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Si on suppose $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire que pour tout n : $0 < an! - b\sum_0^n \frac{n}{k!} < \frac{3b}{n+1}$. En particulier, avec $n = 3b$:

$$0 < an! - b\sum_0^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < 1$$

Or on vient d'encadrer un entier entre 0 et 1, ce qui n'est pas possible, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Retour à Khôlle 57 : Loi exponentielle, Irrationalité de e.

2.58 Correction Khôlle 58 : Abélianisation, Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$?

Retour à Khôlle 58 : Abélianisation, Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$?.

Exercise 2.176 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.177 (Problème principal)**.** Soient $g \in G$ et $h \in DG$. On veut montrer que DG est distingué dans G, c'est-à-dire que $ghg^{-1} \in G$. Or h peut s'écrire comme un produit de commutateurs, commençons donc par le cas $h = [a, b]$: $g[a, b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$. En fait, plus globalement, si $\phi : G \to G$ est un endomorphisme, alors $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$. De fait, si h est un produit de commutateurs $[a_1, b_1]...[a_n, b_n]$, et ϕ un endomorphisme, on a $\phi(h) = \phi([a_1, b_1])...\phi([a_n, b_n]) = [\phi(a_1), \phi(b_1)]...[\phi(a_n), \phi(b_n)]$. Ainsi, l'image d'un produit de commutateurs est un produit de commutateurs. En particulier DG est normal car $\forall g \in G, h \in DG, ghg^{-1} \in DG$ en vertu du fait que $x \mapsto gxg^{-1}$ est un endomorphisme de G.

On a montré que $\forall g \in G, gDGg^{-1} \subset DG$. On va vérifier tout d'abord que la loi proposée est bien définie. Cela équivaut à ce que $\forall g_1, g_1', g_2 \in G, g_1DG = g_1'DG \Rightarrow (g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1'DG) \star (g_2DG)$; ce qui revient à :$\forall g_1, g_2 \in G, h \in DG, (g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1hDG) \star (g_2DG)$; c'est-à-dire $\forall g_2 \in G, h \in DG, g_2DG = hg_2DG$; finalement, l'opération est bien définie si et seulement si $\forall g_2 \in G, h \in DG, g_2^{-1}hg_2 \in DG$ (ce qui est le cas).

La loi $\star$ sur H est interne et associative (par héritage de l'associativité de la loi de groupe de G), son élément neutre est $DG = e_GDG$ (où e_G est l'élément neutre de G). L'inverse d'une classe est donné par la classe de l'inverse : $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Ainsi, H est bien muni d'une structure de groupe (on dit que c'est le groupe quotient de G par DG, on aurait pu parler du quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué en toute généralité).

Reste à montrer que $(H, \star)$ est commutatif (ici, on va utiliser qu'on a le quotient par DG en particulier). Soient $g_1, g_2 \in G$, calculons $[g_1DG, g_2DG]$ (défini avec la même formule dans H que dans G) :

$$[g_1DG, g_2DG] = (g_1DG) \star (g_2DG) \star (g_1^{-1}DG) \star (g_2^{-1}DG) = [g_1, g_2]DG = DG$$

La dernière égalité vient du fait que $[g_1, g_2] \in DG$ d'après sa définition. Comme DG est l'élément neutre de H, on a : $\forall x, y \in H, [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = e_H$. C'est-à-dire : $\forall x, y \in H, xy = yx$. H est bien un groupe commutatif (c'est ce qu'on appelle *l'abélianisé* de G).

Exercise 2.178 (Question subsidiaire)**.** On a évidemment $0 \in A$, et si $|x| \geq 2$, alors $x^2 \geq 4 > 2$, donc $A \subset [-2, 2]$ est borné.

Si A admet une borne supérieure, alors cela signifie que $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$ admet un minimum. Or si on note $m = \frac{a}{b}$ ce minimum. Soit n assez grand pour que $0 < \frac{1}{n} < m - \sqrt{2}$. Alors $m - \frac{1}{n} \in B$ car $\left(m - \frac{1}{n}\right)^2 > \sqrt{2}^2 = 2$. Seulement $m - \frac{1}{n} < m$, ce qui contredit la définition de m.

Ainsi A n'a pas de borne supérieure.

Retour à Khôlle 58 : Abélianisation, Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$?.

2.59 Correction Khôlle 59 : Sous-corps dense dans $\mathbb{R}$, Lemme de Cousin

Retour à Khôlle 59 : Sous-corps dense dans $\mathbb{R}$, Lemme de Cousin.

Exercise 2.179 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.180 (Problème principal)**.** On note $K = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- K est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ car K est stable par addition, contient $0 (= 0 + 0\sqrt{2})$ et contient les opposés : $-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2}$.
- K est stable par multiplication : $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$.
- Si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$, sans quoi on pourrait écrire $\sqrt{2} = -{}^a\!/_b \in \mathbb{Q}$.
- K contient $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.
- K contient ses inverses : pour $a, b \in \mathbb{Q}$, on pose $c = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $d = \frac{-b}{a^- 2b^2}$, puis on vérifie que $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = 1$.

Il s'agit en réalité d'un fait bien plus général, fondement de la théorie des nombres : si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de coefficient dominant 1 et irréductible dans $\mathbb{Q}$ (voir le cours de polynômes), et $\alpha \in \mathbb{C}$ un racine de P, alors $\mathbb{Q}(\alpha) = \{Q(\alpha); Q \in \mathbb{Q}(X)\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercise 2.181 (Question subsidiaire)**.** C'est un exercice assez difficile...

On construit $C = \{y \in [a, b]; [a, y]$ possède une subdivision$\}$ ($[a, y]$ est dite δ-fine), on va montrer que $b \in C$. On sait que C est non vide car $a \in C$ (on peut subdiviser $\{a\}$ par $x_0 = a$ et $t_0 = a$). En outre, C est majoré par b. on note c sa borne supérieure. On va montrer que $c \in C$.

Supposons $c \notin C$. Soit $c - \delta(c) < d < c$ tel que $d \in C$ (ce qui existe car c est a borne supérieure de C). Soit $x_0, ..., x_n$ une subdivision de $[a, d]$ avec $t_0, ..., t_n$. On pose $x_{n+1} = c$ et $t_{n+1} = c$, on obtient que $[a, c]$ est δ-fine : $c \in C$.

Maintenant, si $c < b$, alors soit e tel que $c < e < b$ et $e - \delta(e) < c$, on peut refaire le même raisonnement te prouver que $e \in C$, ce qui contredit la majoration de C par c. De fait, $c = b$ et $[a, b]$ est δ-fine.

En réalité, cette propriété équivaut à l'axiome de la borne supérieure, et il est parfois plus pratique de raisonner avec cette formulation.

Retour à Khôlle 59 : Sous-corps dense dans $\mathbb{R}$, Lemme de Cousin.

2.60 Correction Khôlle 60 : Automorphismes intérieurs

Retour à Khôlle 60 : Automorphismes intérieurs.

Exercise 2.182 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.183 (Problème principal)**.** La relation $\sim$ est :

— Réflexive : $x = r_G x e_G^{-1}$.

— Symétrique : si $y \sim x$, alors soit $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y = g^{-1}x\left(g^{-1}\right)^{-1}$. Or $g^{-1} \in G$, donc $x \sim y$.

— Transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$, soient g et h tels que $y = gxg^{-1}$ et $z = hyh^{-1}$. Alors $z = (hg)x(hg)^{-1}$, donc $x \sim z$.

Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

Soit $x \in G$, alors : $\iota_g \circ \iota_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \iota_{gh}(x)$. Donc on a bien $\iota_g \circ \iota_h = \iota_{gh}$.

En outre, $\iota_{e_G}(x) = e_G x e_G^{-1} = x = \mathrm{Id}_G(x)$.

Dès lors, $\iota_g \circ \iota_{g^{-1}} = \iota_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, et symétriquement. Donc $\iota_g^{-1} = \iota_{g^{-1}}$.

Ainsi, l'application ι est un morphisme de G vers $\mathrm{Aut}(G)$.

Soit maintenant $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ et $g, x \in G$:

$$\phi \circ \iota_g \circ \phi^{-1}(x) = \phi(g\phi^{-1}(x)g^{-1}) = \phi(g)\phi(\phi^{-1}(x))\phi(g)^{-1} = \iota_{\phi(g)}(x)$$

Ainsi, pour $\psi \in \mathrm{Im}\iota$ et $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, on a bien $\phi\psi\phi^{-1} \in \mathrm{Im}\iota$: $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G),\ \phi\left(\mathrm{Im}\iota\right)\phi^{-1} \subseteq \mathrm{Im}\iota$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\iota$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercise 2.184 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x - a|; a \in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide car A est non vide et minorée par 0, donc il admet un borne inférieure par l'axiome de la topologie réelle. Ainsi, d_A est bien définie. On remarque que si $x \in A$, alors $0 \in \{|x - a|; a \in A\}$, donc $d_A(x) = 0$. En outre, $d_A(x) \geq 0$ grâce à la valeur absolue.

Soit $a \in A$, grâce à l'inégalité triangulaire, on a : $|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$, donc $d_A(x) \leq |x - y| + d_A(y)$. Pareillement, on peut échanger les rôles de x et y et on obtient finalement : $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Retour à Khôlle 60 : Automorphismes intérieurs.

2.61 Correction Khôlle 61 : Densité de la différence de deux suites

Retour à Khôlle 61 : Densité de la différence de deux suites.

Exercise 2.185 (Question de cours)**. Cf cours !** Attention, une suite (strictement) croissante est soit convergente (si et seulement si elle si bornée), soit elle tend vers $+\infty$ (si et seulement si elle n'est pas bornée). Par contraposée, on en déduit par exemple qu'une suite divergente qui ne tend pas vers $+\infty$ possède un rang n tel que $u_{n+1} < u_n$.

Exercise 2.186 (Problème principal)**.** On peut par exemple penser à $(\log n)_n$ ou à $(\sqrt{n})_n$.

Soit $p = \min_{k > n_0 \text{ et } u_k > x}$ (partie non-vide de $\mathbb{N}$ car $u_n \to +\infty$). Alors $x \in [u_{p-1}, u_p]$, et comme $p - 1 \geq n_0$, $|u_p - u_{p-1}| \leq \varepsilon$, donc $0 \leq u_p - x \leq \varepsilon$ (attention au cas $p = n_0 + 1$).

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit n_0 défini comme précédent (pour u_n). Soit m tel que $x + v_m \geq u_{n_0}$, ce qui existe car $v_m \to +\infty$. En appliquant le paragraphe précédent, on obtient l'existence de p tel que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$, d'où la densité.

Soit $x \in [0, 1]$. On pose $(v_n)_n = (\lfloor u_n \rfloor)_n \to +\infty$. On obtient donc l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ de m, p tels que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$. Cela induit $u_p - v_m \in [0, 1[$, puis $v_m = \lfloor u_p \rfloor$ nécessairement. On obtient bien a densité de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_n$ dans $[0, 1]$.

Exercise 2.187 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.184.

Retour à Khôlle 61 : Densité de la différence de deux suites.

2.62 Correction Khôlle 62 : Piles de cartes

Retour à Khôlle 62 : Piles de cartes.

Exercise 2.188 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.189 (Problème principal)**.** Toute la solution est sur cette vidéo.

Exercise 2.190 (Question subsidiaire)**.** On rappelle la définition d'une suite de Cauchy : c'est une suite telle que $\sup_{m,p \geq n} |u_m - u_p| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy réelle. $(u_n)_n$ est en particulier bornée car il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p \geq N} |u_m - u_p| < +\infty$ (sans quoi cela ne pourrait tendre vers 0). On nomme M cette valeur. On a alors $\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_N| + |u_n - u_N| \leq |u_N| + M$. Donc $(u_n)_n$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une extraction convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p \geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \sup_{m,p \geq N} |u_m - u_p| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$. D'où la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Réciproquement, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors, pour $\varepsilon > 0$, on pose N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Alors, soit $m, p \geq N$, on a $|u_m - u_p| \geq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon, \exists N, \sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a équivalence de *converger* et *être une suite de Cauchy*, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ par exemple. $\mathbb{R}$ est ce qu'on appelle un corps *complet*.

Retour à Khôlle 62 : Piles de cartes.

2.63 Correction Khôlle 63 : Variation de la constante pour les suites

Retour à Khôlle 63 : Variation de la constante pour les suites.

Exercise 2.191 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.192 (Problème principal)**.** Pour $(v_n)_n$, on a le produit télescopique : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_0}$ d'une part. D'autre part : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \prod_k (k+1)! = n!$. Ainsi : $v_n = Cn!$.

En injectant $C(n)n!$ dans l'égalité, on obtient immédiatement :

$$C(n+1) - C(n) = 2^n$$

Cela donne la somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} C(k+1) - C(k) = C(n) - C(0) = 2^n - 1$. Comme on veut que $u_n = (C(0) + 2^n - 1)n!$, on obtient $C(0) = u_0$ et finalement $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$

Pour la deuxième récurrence, on peut faire exactement la même chose : on cherche d'abord $(v_n)_n$ telle que $v_{n+1} - 3^{2n} v_n = 0$, ce qui donne $v_n = 3^{n(n-1)} v_0$. On cherche ensuite les solution à la récurrence de la forme $C(n)3^{n(n-1)}$, ce qui donne $C(n+1) - C(n) = 3^{-n}$ et finalement, en regardant la condition initiale :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right) 3^{n(n-1)}$$

Exercise 2.193 (Question subsidiaire)**.** On pose la fonction $\alpha \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sin n\alpha|$, qui est bien définie par l'axiome de la borne supérieure.

- Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: $f(\alpha) \geq \sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3})$.
- Si $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$: Soit n_0 tel que $(n_0 - 1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$. Alors les inégalités garantissent $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Si $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$: on note que $\pi - \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha) = \sup_n |\sin(n\alpha)| = \sup_n |\sin(n(\pi - \alpha))| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, on vient de prouver que l'inf est atteint (c'est un minimum) et vaut $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Retour à Khôlle 63 : Variation de la constante pour les suites.

2.64 Correction Khôlle 64 : Moyenne arithmético-géométrique

Retour à Khôlle 64 : Moyenne arithmético-géométrique.

Exercise 2.194 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.195 (Problème principal)**.** Premièrement, $v_n \leq u_n$ car $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2}{2}$. Cela induit que $(u_n)_n$ est décroissante (car $u_{n+1} = \frac{v_n+u_n}{2} \geq \frac{u_n+u_n}{2} = u_n$) et $(v_n)_n$ est croissante (car $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$. En outre, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ donc $0 \leq u_n - v_n \leq 2^{-n}(u_0 - v_0) \to 0$. D'où le caractère adjacent de ces suites.

Par sa définition, on a $M(x,y) = M\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = M\left(\frac{y+x}{2}, \sqrt{yx}\right) = M(y,x)$. M est bien symétrique. Ensuite, si on pose $u_0' = tx$ et $v_0' = ty$, alors on peut prouver par récurrence que $u_n' = tu_n$ et $v_n' = tv_n$. Ainsi, la limite commune de $(u_n')_n$ et $(v_n')_n$ vaut t fois celle de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$: $M(tx,ty) = tM(x,y)$. Enfin, on a déjà prouvé l'inégalité grâce au caractère adjacent des deux suites, reste le cas d'égalité. S'il y a égalité, alors en particulier l'une des deux suites $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ est stationnaire. Il s'ensuit que x et y son égaux car on aurait $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ (ce qui induit $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} = 0$).

Pour l'intégrale elliptique, voire ici.

Exercise 2.196 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.175.

Retour à Khôlle 64 : Moyenne arithmético-géométrique.

2.65 Correction Khôlle 65 : Théorème de Beatty

Retour à Khôlle 65 : Théorème de Beatty.

Exercise 2.197 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.198 (Problème principal)**.** On introduit $a_n(x) = \#\left(A(x) \cap [1,n]\right)$ et idem pour y.

Soit $k \geq \frac{n+1}{x}$, alors $\lfloor kx \rfloor \geq kx \geq n+1$, donc $a_n(x) \leq \frac{n+1}{x}$. De la même manière, si $k \leq \frac{n+1}{x} - 1$, alors $\lfloor kx \rfloor \leq kx \leq n+1-x$, et comme $\lfloor kx \rfloor$ est un entier, on a bien $\lfloor kx \rfloor \leq n$, ce qui induit : $a_n(x) \geq \frac{n+1}{x} - 1$. On obtient l'inégalité (qui vaut aussi pour y) :

$$a_n(x) \leq \frac{n+1}{x} \leq a_n(x) + 1$$

De fait, en retournant les inégalités, on obtient $\frac{a_n(x)}{n} \to \frac{1}{x}$, et si $(A(x), A(y))$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on doit avoir : $a_n(x) + a_n(y) = n$, donc en passant à la limite : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. En outre, si x (ou y) appartient à $\mathbb{Q}$, alors l'autre aussi, et en posant $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$, on a $\lfloor p_2 q_1 x \rfloor = \lfloor p_1 q_2 y \rfloor (= p_1 p_2)$, ce qui n'est pas.

Réciproquement, on suppose que $x, y \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, et (par l'absurde) que $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$. Dans ce cas, soit $k = \lfloor nx \rfloor = \lfloor ym \rfloor$, Grâce aux inégalités usuelles, on obtient $k \leq n + m < k + 1$. Comme k, n et m sont des entiers, cela induit $k = n + m$, puis $k = nx$ et $k = ny$, ce qui contredit le caractère irrationnel de x et y. Soit maintenant $k = \lfloor nx \rfloor$, on veut montrez que toutes les valeurs $j \leq k$ sont dans $A(x) \cup A(y)$, c'est à dire qu'on veut montrer que $\#\left(A(x) \cup A(y)\right) = k$. On pose m tel que $\lfloor my \rfloor < k < \lfloor (m+1)y \rfloor$ (on a déjà prouvé qu'il ne pouvait pas y avoir égalité car $A(x) \cap A(y) = \emptyset$). Comme $x, y > 1$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ et $n \mapsto \lfloor ny \rfloor$ sont strictement croissante, donc il y a $n + m$ valeurs dans $A(x) \cup A(y)$ qui sont $\leq k$. Or on a :

$$\frac{k}{x} \leq n < \frac{k+1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{k}{y} - 1 < m < \frac{k+1}{y}$$

En additionnant, on trouve : $k - 1 < n + m < k + 1$, d'où $k = n + m$, ce qui conclut.

Ce théorème permet d'assurer qu'on a toujours un moyen de proposer une partie qu'on est sûr de pouvoir gagner au *jeu de Wythoff*.

Exercise 2.199 (Question subsidiaire)**.** Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors on a $(1-l)l \geq \frac{1}{4}$. Or comme $\ell \in [0,1]$, par l'analyse du polynôme $(1-X)X$, on obtient que $\ell = \frac{1}{2}$ est la seule valeur possible.

Reste à prouver la convergence. On sait que $(u_n)_n$ est minorée par 0. En outre :

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - u_n\right)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n)$$

Comme $1 - u_n > 0$, on obtient que $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi, elle converge.

Retour à Khôlle 65 : Théorème de Beatty.

2.66 Correction Khôlle 66 : Césaro multiplicatif

Retour à Khôlle 66 : Césaro multiplicatif.

Exercise 2.200 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.201 (Problème principal)**.** Ou bien on revient aux suite de Césaro en appliquant le logarithme, ou on refait la démonstration comme il suit (ici $\ell > 0$, on laisse le lecteur faire le cas $\ell = 0$).

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. On a alors par produit : $u_N\left(\ell - \varepsilon\right)^{n-N} \leq u_n \leq u_N\left(\ell + \varepsilon\right)^{n-N}$. En passant à la $\sqrt[n]{\dots}$, on obtient :

$$u_N^{1/n}\left(\ell - \varepsilon\right)^{1-N/n} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{1/n}\left(\ell + \varepsilon\right)^{1-N/n}$$

Par encadrement et passage à la limite, on obtient l'existence d'un $\tilde{N}$ tel que $\forall n \geq \tilde{N}, \ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Ainsi, $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

La réciproque est fausse, on peut par exemple créer la suite suivante : on prend a, b deux réels positifs différents, $u_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n & \text{si } n \text{ impair} \\ u_{n+1} = bu_n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors, $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ ne converge pas (cela vaut alternativement a puis b), alors que $\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{2n}{2n+1}} \to \sqrt{ab}$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab}$.

Pour $u_n = \binom{2n}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$, donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, donc $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \to \frac{27}{e}$, donc $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \to \frac{27}{e}$ quand $n \to +\infty$.

Exercise 2.202 (Question subsidiaire)**.** On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_n = 0$ si n n'est pas premier, et $u_p = 1$ pour tout p premier (on pourra noter $(\mathbb{1}_{\mathcal{P}}(n))_n$). Dans ce cas, $(u_{kn})_n$ est nulle pour $n \geq 2$, donc $\forall k \neq 1, u_{kn} \to 0$. Cependant, $(u_n)_n$ ne peut converger car elle possède une suite extraite $(u_p)_{p \in \mathcal{P}}$ qui tend vers 1. Elle a donc 2 valeurs d'adhérence.

Retour à Khôlle 66 : Césaro multiplicatif.

2.67 Correction Khôlle 67 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Retour à Khôlle 67 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

Exercise 2.203 (Question de cours)**. Cf cours !**

En outre, pour $x, y \in E$, un espace vectoriel, on a :

$$(1+1).(x+y) = 1.(x+y) + 1.(x+y) = x + y + x + y$$

$$(1+1).(x+y) = (1+1).x + (1+1).y = x + x + y + y$$

Comme $(E, +)$ est un groupe, tout élément y est régulier et on peut simplifier par x à gauche et par y à droite sur les deux lignes. On obtient : $y + x = x + y$. Finalement, $(E, +)$ est abélien, quel que soit le corps (commutatif ou non) et l'espace vectoriel choisis.

Exercise 2.204 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit x un élément de C. Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y, z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Exercise 2.205 (Question subsidiaire)**.** Après quelques expérimentations sur les premiers termes de la suite, on se rend compte qu'on doit pouvoir prouver que $\forall n, \forall k \geq 2^n, u_k \leq 1/2^n$. Cela se montre efficacement par récurrence.

Supposons que cette propriété soit vérifiée pour un n fixé. Soit $k \geq 2^{n+1}$, on sait que $2u_k$ est inférieur à au moins $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ termes des $u_1, ..., u_{k-1}$. De fait, $2u_k$ est inférieur à au moins 2^n termes (car $k \geq 2^{n+1}$), et l'un d'entre eux est nécessairement un terme d'indice $\geq 2^n$ (sans quoi on aurait 2^n nombres entre 1 et $2^n - 1$). Ainsi, par hypothèse de récurrence : $2u_k \leq 1/2^n$, puis : $u_k \leq 1/2^{n+1}$.

Finalement, on a montré que $(u_n)_n$ est majorée par la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n, \forall k \in [2^n, 2^{n+1}[, v_k = 1/2^n$. Cette suite tend évidemment vers 0, et donc u_n aussi. Pour le voir, soit on peut montrer que $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, 0 \leq v_n \leq \varepsilon$, soit on peut voir que $(v_n)_n$ est une suite décroissante minorée (par 0), donc convergente ; et que sa suite extraite $(v_{2^n})_n = (1/2^n)_n$ tend vers 0.

Retour à Khôlle 67 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

2.68 Correction Khôlle 68 : Sous-espace engendré

Retour à Khôlle 68 : Sous-espace engendré.

Exercise 2.206 (Question de cours)**. Cf cours !** Une intersection d'espaces vectoriels est toujours un espace vectoriel, une réunion, rarement.

Plus précisément, si on suppose que $F \cup G$ est un espace vectoriel et que ni $F \subset G$, ni $G \subset F$, alors on peut prendre deux éléments $f \in F \backslash G$ et $g \in G \backslash F$. Par combinaison linéaire, $f + g \in F \cup G$, comme F et G sont des espaces vectoriels, ou bien $f+g \in F$ et $g = (f+g) - f \in F$ ou bien $f = (f+g) - g \in G$, ce qui n'est pas.

Exercise 2.207 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que $c \in Vect(a, b)$ et $d \in Vect(a, b)$ pour avoir $Vect(a, b) \subset Vect(a, b)$. Ensuite, on montrera que $Vect(a, b) \subset Vect(c, d)$. On a rapidement : $a = c + 2d$ et $b = 2c - d$. Dès lors, $Vect(a, b) \subset Vect(a, b)$. Inversement, on peut retrouver linéairement c et d en fonction de a et b en résolvant le système :

$$\begin{cases} c + 2d & = a \\ 2c - d & = b \end{cases}$$

On obtient $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$.

Pour montrer que $c \in Vect(a, b)$, on peut aussi chercher directement x, y tel que $c = xa + yb$, ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x - y & = 0 \\ 3x + y & = 1 \end{cases}$$

On trouve $x = {}^1/_5$ et $y = {}^2/_5$ (il faut vérifier que les 3 équations sont vérifiées par ces solutions). Ainsi, on a bien $c \in Vect(a, b)$. On peut procéder de même pour les trois autres appartenances.

Exercise 2.208 (Question subsidiaire)**.** Montrons par récurrence que $\forall n,\ v_n = b\prod_{k=1}^n \cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n}$.

L'hypothèse est bien vérifiée en $n = 0$. et si elle est vérifiée au rang n, alors (notons que $\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(v_n + v_n \cos\frac{\alpha}{2^n}\right) = v_n \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Grâce à la seconde ligne ci-dessus, on en déduit la formule voulue pour u_n. L'hérédité s'en suit.

Ensuite, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$, donc $(v_n)_n$ est décroissante. Par ailleurs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos{}^\alpha/_{2^{n+1}}}{\cos{}^\alpha/_{2^n}} = \frac{\cos^2{}^\alpha/_{2^{n+1}}}{\cos{}^\alpha/_{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos{}^\alpha/_{2^n}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante avec $\forall n,\ u_n < v_n$ (car $\cos\frac{\alpha}{2^n} < 1$). Ces deux suites convergent donc (u_n est majorée par v_0 et inversement) : $u_n \to \ell_u$ et $v_n \to \ell_v$. Or : $\ell_u = \lim v_n \cos\frac{\alpha}{2^n} = \ell_v \times 1$. Les deux suites sont bien adjacentes.

Reste à déterminer la limite de $(v_n)_n$. C'est un exercice classique : comme $\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin{}^\alpha/_{2^{k-1}}}{2\sin{}^\alpha/_{2^k}}$, le produit dans la formule de v_n est télescopique :

$$v_n = b\prod_{k=1}^n \cos\frac{\alpha}{2^k} = b\prod_k \frac{\sin{}^\alpha/_{2^{k-1}}}{2\sin{}^\alpha/_{2^k}} = b\frac{\sin\alpha}{2^2\sin{}^\alpha/_{2^n}} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin{}^\alpha/_{2^n}}{{}^\alpha/_{2^n}}\right)^{-1}$$

Quand $n \to +\infty$, on a ${}^\alpha/_{2^n} \to 0$, donc $\frac{\sin{}^\alpha/_{2^n}}{{}^\alpha/_{2^n}} \to 1$ (c'est la dérivée de $x \mapsto \sin x$ en 0).

Finalement : u_n et v_n tendent vers $b\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

Retour à Khôlle 68 : Sous-espace engendré.

2.69 Correction Khôlle 69 : Évaluation des polynômes

Retour à Khôlle 69 : Évaluation des polynômes.

Exercise 2.209 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.210 (Problème principal)**.** Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on peut alors écrire les conditions données :

$$\begin{cases} -a+b-c+d & = 1 \\ a+b+c+d & = 0 \\ 8a+4b+2c+d & = 1 \end{cases}$$

On a un variable auxiliaire. On trouve par pivot :

$$\begin{cases} b & = -a - 1/2 \\ c & = -2a + 1/2 \\ d & = 2a \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes P tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ est $\{aX^3 - (a+\frac{1}{2})X^2 - (2a - \frac{1}{2})X + 2a; a \in \mathbb{R}\}$.

Exercise 2.211 (Question subsidiaire)**.** Cet exercice est traité dans son entièreté dans le cours de convergence des séries en fin d'année ou en Spé. Seule la solution de la première partie (divergence + équivalence $\Rightarrow$ équivalence des sommes partielles) sera détaillée ici.

Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

Remarquons que $U_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ et idem pour V_n, donc, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq\ & U_n & \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \\
(1-\varepsilon)V_n - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq\ & U_n & \leq (1+\varepsilon)V_n - (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \\
(1-\varepsilon) - \frac{1}{V_n}\left((1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right) \leq\ & \frac{U_n}{V_n} & \leq (1+\varepsilon) - \frac{1}{V_n}\left((1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)
\end{aligned}$$

Or $V_n \to +\infty$, donc, à partir de $n_1 (\geq n_0)$:

$$\forall n \geq n_1,\ (1-\varepsilon) - \varepsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq (1+\varepsilon) + \varepsilon$$

Cela prouve que $U_n/V_n \to 1$, et donc que $U_n \sim V_n$.

Retour à Khôlle 69 : Évaluation des polynômes.

2.70 Correction Khôlle 70 : Combinaison linéaire

Retour à Khôlle 70 : Combinaison linéaire.

Exercise 2.212 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.213 (Problème principal)**.** Raisonnons par analyse-synthèse. Supposons qu'on puisse trouver λ, μ tels que $w = (\lambda, \mu, -37, -3) \in F$, soit alors x et y tels que $w = xu + yv$, on obtient en particulier le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + 4y &= -37 \\ 3x + 7y &= -3 \end{cases}$$

On trouve : $x = \frac{247}{47}$ et $y = -\frac{126}{47}$ puis $\lambda = u + 2v = \frac{-5}{47}$ et $\mu = 2u - v = \frac{620}{47}$.

Réciproquement, les valeurs ci-dessus garantissent que $(\lambda, \mu, -37, -3) = xu + yv$, donc $(\lambda, \mu, -37, -3) \in F$.

Exercise 2.214 (Question subsidiaire)**.** Soit ℓ la limite de $(u_n)_n$. On étudie $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell$:

$$v_n - \frac{n+1}{2n}\ell = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(u_k - \ell)$$

On applique alors la même méthode que afin de démontrer le théorème de Césaro, et on va montrer que $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$, c'est-à-dire : $v_n \to \ell/2$.

Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ assez grand :

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k \leq \varepsilon\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \varepsilon$$

D'autre part, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell) \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc à partir d'un certain rang $N_1 \geq N$, on a $\forall n \geq N_1, \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| \leq \varepsilon$. Finalement :

$$\forall n \geq N_1, \left|v_n - \frac{n+1}{2n}\ell\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| + \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq 2\varepsilon$$

De fait, $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$ et $v_n \to \ell/2$.

La réciproque est fausse, comme celle du théorème de Cesaro : la suite $(u_n)_n = (1, 0, 1, 0, ...)$ ne converge pas, mais on a :

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} k = \frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^2 \to \frac{1}{4}$$

Retour à Khôlle 70 : Combinaison linéaire.

2.71 Correction Khôlle 71 : Espace engendré par un cône

Retour à Khôlle 71 : Espace engendré par un cône.

Exercise 2.215 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.216 (Problème principal)**.** C n'est pas un espace vectoriel car $(x \mapsto x) \in C$ mais $-(x \mapsto x) \in C$: C n'est pas stable par multiplication par les scalaires. Par contre, C est stable par somme a coefficient positifs.

Soient $(f, g, h, j) \in C$ on pose $x = f - g$ et $y = h - j$. On a $x + y = (f + h) - (g + j) \in V$, $-x = g - f \in C$, donc $(V, +)$ est un groupe. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda \geq 0$, on peut écrire : $\lambda x = (\lambda f) - (\lambda g) \in V$, si $\lambda < 0$, on peut écrire $\lambda x = (|\lambda| g) - (|\lambda| f) \in V$. Donc V est stable par multiplication par des scalaires réels. Reste à vérifier les 4 axiomes.

$$1.x = 1.f - 1.g = f - g = x$$

$$(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)f - (\lambda + \mu)g = \lambda(f - g) + \mu(f - g) = \lambda x + \mu x$$
$$\lambda(x + y) = \lambda(f - g + h - j) = \lambda f - \lambda g + \lambda h - \lambda j = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda\mu)x = (\lambda\mu)f - (\lambda\mu)g = \lambda(\mu f) - \lambda(\mu g) = \lambda(\mu x)$$

Exercise 2.217 (Question subsidiaire)**.** Avant d'attaquer l'exercice, redémontrons l'inégalité des 3 moyennes :

$$\forall x, y \neq 0, \ \frac{1}{1/x + 1/y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

On a $xy - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4xy - x^2 - y^2 - 2xy\right) = \frac{-1}{4}(x + y)^2$, donc l'inégalité de droite est vérifiée.

De surcroît, $\frac{xy}{(1/x+1/y)^{-2}} = \frac{xy}{4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right) = \frac{1}{4xy}\left(x^2 + y^2 + 2xy\right)$. Donc $\frac{xy}{(1/x+1/y)^{-2}} \geq 1$ équivaut à $x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$, c'est-à-dire $(x - y)^2 \geq 0$, ce qui est le cas. Cela prouve l'inégalité de gauche.

Terminons par remarquer que :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{1}{1/x + 1/y} \times \frac{x + y}{2}}$$

Commençons par prouver par récurrence que $\forall n, \ 0 > v_n \leq u_n$. Cela montrera qu'il n'y a pas de problème de définition pour v_n. C'est vrai au rang 0 et, si cela est vrai au rang n, alors les suites sont bien strictement positives au rang n et les inégalités entre les 3 moyennes donnent bien $v_{n+1} \leq u_{n+1}$.

En outre, $(u_n)_n$ est décroissante car, grâce à $v_n \leq u_n$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

De plus, v_n est croissante car :

$$v_{n+1} = \frac{1}{1/u_n + 1/v_n} \geq \frac{1}{1/v_n + 1/v_n} = v_n$$

Ainsi, les suites u_n et v_n sont convergente (u_n est décroissante minorée par v_0 et inversement). Disons que $u_n \to \ell_u$ et $v_n \to \ell_v$. Regardons ce que cela signifie pour $(u_n)_n$:

$$\ell_u = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$$

Ainsi, $\ell_u = \ell_v$ et les suites sont adjacentes : elle convergent vers une limite commune ℓ.

Enfin, la dernière remarque sur l'inégalité des 3 moyennes nous indique, par une récurrence immédiate, que $\forall n,\ \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{xy}$. En passant à la limite : $\sqrt{\ell^2} = \sqrt{xy}$ donc $\ell = \sqrt{xy}$ car les suites sont positives.

Retour à Khôlle 71 : Espace engendré par un cône.

2.72 Correction Khôlle 72 : Ensemble milieu

Retour à Khôlle 72 : Ensemble milieu.

Exercise 2.218 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.219 (Problème principal)**.** On nomme a_k les affixes des A_k et m_k celles de M_k. On peut écrire le système correspondant $m_n + m_1 = 2a_n$ et $m_k + m_{k+1} = 2a_k$. Donc $z_{k+1} = -z_k + 2a_k$, puis $z_n = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}a_j$. En utilisant la dernière égalité, on a donc : $2\sum_k(-1)^{n-k}a_k = (1-(-1)^n)z_1$.

On a donc deux possibilités, soit n est impair, et alors on trouve une valeur explicite pour z_1, et ainsi pour tous les autres z_k.

Si n est pair, il faut que $\sum_k(-1)^k a_k = 0$. Si c'est le cas, on obtient un système à $n-1$ équations qu'on a déjà résolu. On a une infinité de solutions. On notera que dans ce cas, le système de points A_k est centré en 0.

Exercise 2.220 (Question subsidiaire)**.** Par une somme télescopique, on a :

$$\forall p, n,\ v_n + (-1)^p v_{2^{p+1}n} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left(v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}\right)$$

Donc en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve l'inégalité souhaitée :

$$\forall p, n,\ |v_n| \leq |v_{2^{p+1}n}| + \sum_{k=0}^{p}|v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}|$$

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n + v_{2n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Dès lors, pour $n \geq n_0$ fixé et p quelconque :

$$\sum_{k=0}^{p}|v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}| \ \leq\ \sum_{k=0}^{p}\frac{\epsilon}{2^k n} \ \leq\ \frac{2\varepsilon}{n}$$

En outre, comme $v_p \to 0$, on sait que pour p suffisamment grand, $|v_{2^{p+1}n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ (on a fixé n juste avant). Dès lors, comme notre inégalité est vérifiée pour tout p, on a en particulier :

$$\forall n \geq n_0,\ n|v_n| \leq 3\varepsilon$$

Ce qui montre que $v_n = o\left({}^1\!/n\right)$. Cela aurait fonctionné pour n'importe quelle suite u_n avec le même raisonnement : $v_n \to 0$ et $v_n + v_{2n} = o(u_n) \Rightarrow v_n = o(u_n)$.

Par contre, on ne peut pas se débarrasser de l'hypothèse $v_n \to 0$. Le lecteur est invité à trouver des exemples ainsi qu'à étudier ce qu'on peut dire quand $v_n + v_{2n} = O(u_n)$ et ce qui se passe quand $v_n \to +\infty$.

Retour à Khôlle 72 : Ensemble milieu.

2.73 Correction Khôlle 73 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Retour à Khôlle 73 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

Exercise 2.221 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.222 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.204.

Exercise 2.223 (Question subsidiaire)**.** F est le noyau de l'application linéaire $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f$, c'est donc un sous-espace vectoriel. On peut écrire $f = \left(f - \int_0^1 f\right) + \int_0^1 f$. Le premier élément est dans F et le second est une fonction constante. Ainsi, l'espace des fonctions constantes, $G = \{x \mapsto c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$, est un supplémentaire de F car on a $E = F + G$ d'après l'égalité précédente, et $F \cap G = \{x \mapsto 0\}$ avec un rapide raisonnement.

On peut d'ailleurs remarquer que pour tout élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, on a : $F \oplus Vect(x) = E$, ce qu'on reverra quand on étudiera les hyperplans.

Retour à Khôlle 73 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

2.74 Correction Khôlle 74 : Familles libres et liées

Retour à Khôlle 74 : Familles libres et liées.

Exercise 2.224 (Question de cours)**.** Comme pour tout x, $(x, u(x))$ est liée, on peut poser λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On a : $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ d'une part, et en outre : $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. En particulier, si la famille (x, y) est libre, alors on peut identifier les coefficients et on a : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Soit maintenant x fixé et S tel que $E = Vect(x) \oplus S$. On pose $\lambda = \lambda_x$ (qui est une quantité fixée), si $y \in S$ alors $u(y) = \lambda y$ d'après le raisonnement précédent. Si $y \in Vect(x)$, soit μ le scalaire tel que $y = \mu x$, on a par linéarité $u(y) = \mu u(x) = \mu\lambda x = \lambda(\mu x) = \lambda y$. Ainsi, u est une homothétie de rapport λ.

NB : On peut aussi remarquer que (si $\dim E \geq 2$) on peut trouver deux vecteurs x et z qui sont libres. En écrivant toujours $E = Vect(x) \oplus S$ et $\lambda_x = \lambda$, on a $u(y) = \lambda y$; en particulier $u(z) = \lambda z$ et $\lambda_z = \lambda$; or si $y \in Vect(x)$, alors (y, z) est libre, donc $\lambda_y = \lambda$ et u est bien une homothétie.

Exercise 2.225 (Problème principal)**.** Regardons chaque famille :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv + cw = \vec{0}$ (où u, v, w désignent les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ du sujet). On obtient un système de 4 équations à 3 inconnues, reste à montrer qu'il est incompatible. En ajoutant les deuxièmes et quatrième lignes, on trouve $c = 0$, puis en ajoutant la première et la troisième, on obtient $a = 0$, ce qui donne $b = 0$ pour finir. La famille est bien libre.
- Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les fonctions cos et sin. On a $f_u = (\cos u)\vec{x} + (\sin u)\vec{y}$. De fait, f_a, f_b et f_c sont 3 vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de 2 vecteurs : ils forment une famille liée.
- f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

Exercise 2.226 (Question subsidiaire)**.** Comme $v \in (F + \mathbb{K}.v) = (F + \mathbb{K}.w)$, on peut trouver $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v = x + \alpha w$. De la même manière, on peut trouver $y \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $w = y + \beta v$. Si $\alpha \neq 0$, la première égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\beta \neq 0$, la deuxième égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\alpha = \beta = 0$, alors on a $(-x - y) + v + w = 0$ où $(-x - y) \in F$: on a encore gagné.

Réciproquement, si $\exists u, \alpha, \beta : u + \alpha v + \beta v = 0$ avec $\alpha\beta \neq 0$, on en déduit que $w = \frac{-1}{\beta}(u + \alpha v)$, donc $w \in F + \mathbb{K}.v$. Pareillement, $v \in F + \mathbb{K}.w$. Finalement : $F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w$.

Retour à Khôlle 74 : Familles libres et liées.

2.75 Correction Khôlle 75 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Retour à Khôlle 75 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation.

Exercise 2.227 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.228 (Problème principal)**.** On pose $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, on obtient $\int_0^1 P = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_1 + p_0$. D'un autre côté : $\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) = (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2)p_2 + (\alpha a + \beta b + \gamma c)p_1 + (\alpha + \beta + \gamma)p_0$. Ainsi, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ \alpha a + \beta b + \gamma c & = 1/2 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 & = 1/3 \end{cases}$$

On a un système de 3 équations à 3 inconnues (qui sont α, β et γ), sa résolution, si on parvient à l'existence d'une solution, prouvera l'existence d'un triplet tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$. Or ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha + & \beta + & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a) + & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & \beta(b^2-a^2) + & \gamma(c^2-a^2) & = 1/3 - a^2 \end{cases}$$

Puis à :

$$\begin{cases} \alpha + & \beta + & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a) + & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & & \gamma(c-a)(c-b) & = 1/3 - 1/2(b+a) + ba \end{cases}$$

Ainsi, si a, b et c sont différents, alors on a une unique solution au système :

$$\begin{cases} \alpha & = \frac{2+6bc-3c-3b}{6(a-b)(a-c)} \\ \beta & = \frac{2+6ca-3a-3c}{6(b-c)(b-a)} \\ \gamma & = \frac{2+6ba-3a-3b}{6(c-b)(c-a)} \end{cases}$$

N.B. : Si $c = a$ (ou $b = c$ ou $a = b$), on se retrouve avec 2 équations pour 3 inconnues, donc on a une infinité de solutions, une infinité de candidats (α, β) valides pour $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b)$, dont on a l'expression explicite.

Exercise 2.229 (Question subsidiaire)**.** Le sens réciproque $\Leftarrow$ est évident.

Supposons par l'absurde que $f \times g = 0$ avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Si $g(x) \neq 0$, on a une contradiction avec $f(x) \times g(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Soit $y \in E$ tel que $g(y) \neq 0$ (idem, on a $f(y) = 0$). On regarde avec la linéarité :

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x) + f(y))(g(x) + g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction. Ainsi, on a montré que pour toutes formes linéaires f et g : $f \times g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

Retour à Khôlle 75 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation.

2.76 Correction Khôlle 76 : Ensemble milieu

Retour à Khôlle 76 : Ensemble milieu.

Exercise 2.230 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.231 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.219.

Exercise 2.232 (Question subsidiaire)**.** p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Partant de ce présupposé, on teste :

$$(Id_E - p)^2 = Id_E - 2p + p^2 = Id_E - p$$

On vient de prouver que si p est un projecteur, alors $Id_E - p$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $q = Id_E - p$ est un projecteur, alors (par ce qu'on vient de montrer) $Id_E - q$ est un projecteur. Or $Id_E - q = p$, ce qui conclut.

On remarquera d'ailleurs que comme p vaut l'identité sur son image, on a : $\text{Ker } (Id_E - p) = \text{Im } p$ et $\text{Im } (Id_E - p) = \text{Ker } p$. Ainsi, le projecteur $Id_E - p$ est le projecteur associé à p dans le sens où si p projette sur F parallèlement à G, alors $Id_E - p$ projette sur G parallèlement à F.

Retour à Khôlle 76 : Ensemble milieu.

2.77 Correction Khôlle 77 : Stabilité et commutation

Retour à Khôlle 77 : Stabilité et commutation.

Exercise 2.233 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.234 (Problème principal)**.** Supposons que f et g commutent. Soit $x \in \text{Ker } g$, alors $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $f(x) \in \text{Ker } g$. De même, si $y \in \text{Im } g$, soit $x \in E$ tel que $g(x) = y$, on a $f(y) = f(g(x)) = g(f(x))$, donc $f(y) \in \text{Im } g$. Ker g et Im g sont stables par f.

Réciproquement, on suppose que $g^2 = g$, et que Ker g et Im g sont stabilisés par f. Comme g est un projecteur, on a $E = \text{Im } g \oplus \text{Ker } g$, donc soit $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } g$ et $z \in \text{Ker } g$. On a :

$$f(g(x)) = f(g(y) + g(z)) = f(g(y)) = f(y)$$

On a utilisé que $g(y) = y$ car g est l'identité sur son image. En outre :

$$g(f(x)) = g(f(y)) + g(f(z)) = f(y) + \vec{0}$$

On a utilisé que $f(y) \in \text{Im } g$, et g est l'identité sur son image, et $f(z) \in \text{Ker } g$.

Ainsi, on a bien $f(g(x)) = g(f(x))$, donc f et g commutent.

Exercise 2.235 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(f + \lambda g)(x) &= \int_0^x t(f + \lambda g)(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^x tg(t)\mathrm{d}t \\
&= (\varphi(f) + \lambda\varphi(g))(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

φ est injective : on regarde son noyau. Soit $f \in \text{Ker } \varphi$. Alors $\forall x, \varphi(f)(x) = 0$, et comme $\varphi(f)$ est dérivable, on obtient $\forall x, \varphi(f)'(x) = xf(x) = 0$, puis $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ et par continuité, f est la fonction nulle. On a montré que $\text{Ker } \varphi = \{x \mapsto 0\}$, c'est-à-dire que φ est injective.

φ n'est pas surjective car $\varphi(f)$ est toujours dérivable : on ne peut pas atteindre tous les éléments de E. On peut tenter de calculer $\text{Im } \varphi$. Soit g un fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et g' dérivable en 0, alors on peut poser $f : t \mapsto g'(t)/t$ et $f(0) = 0$. On a bien $f \in E$ grâce aux hypothèses qui assurent la continuité en 0. En outre, $\varphi(f) = \int_0^x t\frac{g'(t)}{t}\mathrm{d}t = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x)$. Réciproquement, si $g \in \text{Im } \varphi$, alors on pose f continue telle que $\varphi(f) = g$, on a alors $g(0) = \int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t = 0$, puis en dérivant $g'(x) = xf(x)$, donc $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g'(0) = 0$ et enfin $\frac{g'(x)-g(0)}{x-0} = f(x)$ converge quand $x \to 0$, donc g est deux fois dérivable en 0. Finalement (et on a bien un espace vectoriel) :

$$\text{Im } \varphi = \{g \in E; g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), g(0) = g'(0) = 0, g' \text{ dérivable en } 0\}$$

Retour à Khôlle 77 : Stabilité et commutation.

2.78 Correction Khôlle 78 : Une équation différentielle d'ordre n

Retour à Khôlle 78 : Une équation différentielle d'ordre n.

Exercise 2.236 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.237 (Problème principal)**.** On a $\text{Ker } U = Vect(x \mapsto e^{x^2})$, en résolvant l'équation différentielle.

Soit $f \in \text{Ker } E$. On pose g tel que $f(x) = g(x)e^{x^2}$ (on va faire une méthode de variation de la constante à l'ordre n), et on a : $U(f)(x) = g'(x)e^{x^2}$. Par récurrence immédiate : $U^n(f)(x) = g^{(n)}e^{x^2}$. On trouve ainsi que $f \in \text{Ker } U^n$ si et seulement $\forall x, g^{(n)}(x) = 0$ si et seulement si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Ainsi :

$$\text{Ker } U^n = \left\{x \mapsto P(x)e^{x^2}; P \in \mathbb{R}_n[X]\right\}$$

Exercise 2.238 (Question subsidiaire)**.** Comme $F' \subset F$, on a : $F' \cap G \subset F' \cap (G \cap F) = \{\vec{0}\}$, car F' et $G \cap F$ sont supplémentaires dans F.

En outre, soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, car $E = F + G$. Ensuite, on peut écrire $x_F = y_{F'} + y_G$ avec $y_{F'} \in F'$ et $y_G \in (G \cap F) \subset G$, car $F' \oplus (G \cap F) = F$. Ainsi : $x = y_{F'} + (y_G + x_G)$ avec $y_{F'} \in F'$ et $(y_G + x_G) \in G$. Finalement : $E = F' + G$.

On a bien montré que : $E = F' \oplus G$.

Retour à Khôlle 78 : Une équation différentielle d'ordre n.

2.79 Correction Khôlle 79 : Fonction vectorielle de Leibnitz

Retour à Khôlle 79 : Fonction vectorielle de Leibnitz.

Exercise 2.239 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.240 (Problème principal)**.** On a (où $\overrightarrow{MG}$ est une constante vis-à-vis de l'indice i) :

$$f(M) = \sum_i a_i(A_i - M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i G - \sum_i a_i M = \sum_i a_i \overrightarrow{MG}$$

En particulier, en regardant depuis le centre O, on a $f(O) = \sum_i a_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{OG}$. Ainsi, si on note $(g_j)_j$ les coordonnées de G dans une base de l'espace vectoriel en jeu, on a : $g_j = \frac{1}{\sum_i a_i} \sum_i a_i x_{i,j}$ où $x_{i,j}$ est la coordonnée de A_i sur le j-ième vecteur de base.

<u>N.B. :</u> Matriciellement, si on pose $A = [x_{i,j}]_{i,j}$ la matrice qui donne les coordonnées des A_i dans la base choisie, et $\vec{a}$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on peut écrire : $G = \frac{1}{\sum_i a_i} \left({}^t A\right).\vec{a}$.

Si $\sum_i a_i = 0$, alors on ne peut pas définir G. Par contre, la fonction f est constante : $f(M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i A_i$ (qui ne dépend pas de M). En particulier, pour j fixé, on constate que $a_j = -\sum_{i \neq j} a_i$, donc $f = \sum_i a_i A_i = \sum_{i \neq j} a_i A_i - \left(\sum_{i \neq j} a_i\right) A_j = \sum_{i \neq j} a_i \overrightarrow{A_j A_i}$; en notant G_j le centre de gravité de $\{(A_i, a_i)\}_{i \neq j}$, on a aussi $f = a_j \overrightarrow{G_j A_j}$ (cela fonctionne quel que soit j donné).

Exercise 2.241 (Question subsidiaire)**.** Soient $x \in \text{Ker } f$, $y \in \text{Ker } (f - Id)$ et $z \in \text{Ker } (f + Id)$ tels que $x + y + z = \vec{0}$. On veut montrer que, alors, $x = y = z = \vec{0}$. En appliquant f, on a :

$$f(x + y + z) = y - z = \vec{0}$$

En appliquant à nouveau f à $y - z = \vec{0}$, on trouve :

$$y + z = \vec{0}$$

On se obtient donc avec le système :

$$\begin{cases} x + y + z &= \vec{0} \\ y - z &= \vec{0} \\ y + z &= \vec{0} \end{cases}$$

Une résolution donne immédiatement $x = y = z = \vec{0}$. Ainsi, Ker f, Ker $(f - Id)$ et Ker $(f + Id)$ sont en somme directe.

Cependant, rien n'oblige à ce que Ker $f \oplus$ Ker $(f - Id) \oplus$ Ker $(f + Id) = E$. Pour s'en persuader, il suffit de regarder $f : x \mapsto 2x$ (sur $E = R^n$ par exemple).

On peut s'interroger plus généralement sur un CNS sur λ, μ tels que Ker f, Ker $(f + \lambda Id)$ et Ker $(f + \mu Id)$ soient en somme direct, ou bien une CNS sur les $(\lambda_i)_i$ tels que les (Ker $(f + \lambda_i))_i$ soient en somme directe.

Retour à Khôlle 79 : Fonction vectorielle de Leibnitz.

2.80 Correction Khôlle 80 : Encodage de la Grassmannienne

Retour à Khôlle 80 : Encodage de la Grassmannienne.

Exercise 2.242 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.243 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que π est injective.
Tous les indices qui suivent sont à considérer modulo n.
Or si $\pi(i) = j \neq i$, alors il existe des coefficient $\lambda_{i+1}, ..., \lambda_j$ tels que :

$$v_i = \sum_{k=i+1}^{j} \lambda_k v_k$$

En outre, $\lambda_j \neq 0$ car sinon, on aurait $v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i+1}, ..., v_{j-1})$, donc $\pi(i) < j$. Dès lors :

$$v_j = \frac{1}{\lambda_j}\left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k\right)$$

Si $\pi(i') = j$ avec $i' < i$ (quitte à échanger les rôles de i et i', cela traitera le cas général), alors il existe des coefficients $(\mu_k)_k$ tels que :

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^{j} \mu_k v_k$$

On peut remplacer v_j par son expression en fonction de $(v_i, ..., v_{j-1})$ de sorte à obtenir une expression de $v_{i'}$ en fonction de $(v_{i'+1}, ..., v_{j-1})$, donc $\pi(i') < j$, ce qui est une contradiction :

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^{j-1} \mu_k v_k + \frac{1}{\lambda_j}\left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k\right)$$

Ainsi, si $\pi(i) = \pi(i') \neq i$, alors $i = i'$.
Reste à voir ce qui se passe quand $\pi(i) = i = \pi(i')$. Si $v_i = \vec{0}$, alors $\mathrm{Vect}(v_{i'+1}, ..., v_i) = \mathrm{Vect}(v_{i'+1}, ..., v_{i-1})$, donc $\pi(i') < i$. Si $v_i \notin \mathrm{Vect}(v_j)_{j \neq i}$ est non-nul, alors $\pi(i') = i$ donne comme avant $v_i = \frac{1}{\lambda'_i}\left(v_{i'} - \sum_{k=i'+1}^{i-1} \lambda'_k v_k\right)$, donc en particulier $v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i'}, ..., v_{i-1})$, ce qui n'est pas.
Finalement, π est injective donc bijective (car $\pi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$) : c'est une permutation.

Exercise 2.244 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.238.

Retour à Khôlle 80 : Encodage de la Grassmannienne.

2.81 Correction Khôlle 81 : Fonctions affines

Retour à Khôlle 81 : Fonctions affines.

Exercise 2.245 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.246 (Problème principal)**.** $\Rightarrow$ On a bien :

- $L(\vec{0}) = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \vec{0}$ (vérification pour la forme)
- $L(\mu x) = f(\mu x) - f(\vec{0}) = f\left(\mu x + (1-\mu)\vec{0}\right) - f(\vec{0}) = \mu f(x) + (1-\mu)f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \mu L(x)$
- $L(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y)\right) - f(\vec{0}) = \frac{1}{2}\left(f(2x) - f(\vec{0})\right) + \left(f(2x) - f(\vec{0})\right) = \frac{1}{2}L(2x) + \frac{1}{2}L(2y) = L(x) + L(y)$ Attention au choix de coefficients ici : un dessin est le bienvenu.

$\Leftarrow$ Si $L : x \mapsto f(x) - f(\vec{0})$ est linéaire, alors soient λ_i, x_i tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. On a :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = L\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) + f(\vec{0}) = \left(\sum_i \lambda_i L(x_i)\right) + \left(\sum_i \lambda_i\right) f(\vec{0}) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Il est évident que si f est une transformation linéaire, alors f respecte $\forall x, y, \lambda,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$: c'est le cas $d = 2$ de sa définition.

Montrons la réciproque. Soient λ_i, x_i tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. Soit $\Lambda = \sum_{i \neq d} \lambda_i$ et $x = \sum_{i \neq d} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i$. On note que $\lambda_d = 1 - \Lambda$, puis :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = f\left(\Lambda x + (1-\Lambda)x_d\right) = \Lambda f(x) + \lambda_d f(x_d)$$

On peut effectuer une récurrence sur d car on s'est ramené au cas $d-1$ en posant $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}$ et $x'_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq d-1$ avec $\sum_{i=1}^{d-1} \lambda'_i = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \neq d} \lambda_i = 1$.

Dès lors, par récurrence :

$$f(x) = f\left(\sum_{i \neq d} \lambda'_i x_i\right) = \sum_{i \neq d} \lambda'_i f(x_i) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \neq d} \lambda_i f(x_i)$$

Et finalement :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \Lambda f(x) + \lambda_d f(x_d) = \sum_{i \neq d} \lambda_i f(x_i) + \lambda_d f(x_d) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Exercise 2.247 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.226.

Retour à Khôlle 81 : Fonctions affines.

2.82 Correction Khôlle 82 : Familles libres et liées

Retour à Khôlle 82 : Familles libres et liées.

Exercise 2.248 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.249 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.225.

Exercise 2.250 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.229.

Retour à Khôlle 82 : Familles libres et liées.

2.83 Correction Khôlle 83 : Matroïdes

Retour à Khôlle 83 : Matroïdes.

Exercise 2.251 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.252 (Problème principal)**.** Une famille vide est libre (par définition, il n'y a pas de dépendance linéaire dans cette famille de vecteurs). Donc, $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre (car on ne peut en trouver une dépendance linéaire) : $\forall X \in \mathcal{I}, Y \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

La vraie question commence ici. Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$. On pose $E_X = Vect(v_i)_{i \in X}$ et idem pour E_Y. Imaginons que $\forall j \in Y, v_j \in E_X$, alors E_X contient une famille libre de taille $|Y|$, donc $\dim E_X = |X| > |Y|$, ce qui n'est pas. De fait, on peut prendre v_e, $e \in Y$ tel que $v_e \notin E_X$. Mais dans ce cas $(v_i)_{i \in X \cup \{e\}}$ est libre car elle est de cardinal $|X| + 1$ est engendre un espace de dimension $\geq |X| + 1$. Ainsi, $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$: on a bien un matroïde.

Exercise 2.253 (Question subsidiaire)**.** Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on peut alors écrire les conditions données :

$$\begin{cases} -a + b - c + d & = 1 \\ a + b + c + d & = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d & = 1 \end{cases}$$

On a un variable auxiliaire. On trouve par pivot :

$$\begin{cases} b & = -a - {}^1\!/_2 \\ c & = -2a + {}^1\!/_2 \\ d & = 2a \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes P tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ est $\{aX^3 - (a + \frac{1}{2})X^2 - (2a - \frac{1}{2})X + 2a; a \in \mathbb{R}\}$.

Retour à Khôlle 83 : Matroïdes.

2.84 Correction Khôlle 84 : Semi-inverse des applications linéaires injectives

Retour à Khôlle 84 : Semi-inverse des applications linéaires injectives.

Exercise 2.254 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.255 (Problème principal)**.** Le sens réciproque, $\Leftarrow$, est évident dans le mesure où si $x \in \text{Ker } v$ avec $u = w \circ v$, il s'ensuit que $u(x) = w(v(x)) = w(\vec{0}) = \vec{0}$, puis $x \in \text{Ker } u$: $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$.

Le sens direct est plus difficile. Soit $y \in \text{Im } v$ et $x \in E$ tel que $v(x) = y$. On veut définir $w(y) = u(x)$, mais il faut vérifier que $u(x)$ ne dépend pas du choix de x tel que $v(x) = y$. Soit alors $x, x' \in E$ tels que $v(x) = v(x') = y$, alors $v(x - x') = \vec{0}$, donc $(x - x') \in \text{Ker } v \subset \text{Ker } u$, d'où $u(x - x') = \vec{0}$ puis $u(x) = u(x')$: on peut bien définir $w(y) = u(x)$ où x est n'importe quel antécédent de y par v.

Soit maintenant F un supplémentaire de $\text{Im } v$ dans E. On pose $\forall z \in F, w(z) = \vec{0}$. Cela permet de définir w par linéarité : pour tout $x \in E$, on écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } v$ et $z \in F$ et on pose $w(x) = w(y)$ (ce qu'on a déjà définit précédemment).

Vérifions que $w \in \mathscr{L}(E)$ et que $u = w \circ v$. Soient $x_1, x_2 \in E$ et λ un scalaire. On écrit la décomposition sur $E = \text{Im } v \oplus F$: $x_1 = y_1 + z_1$ et $x_2 = y_2 + z_2$, d'où $x_1 + \lambda x_2 = (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2)$. Dès lors, $w(x_1 + \lambda x_2) = w(y_1 + \lambda y_2)$. Or, si $v(t_1) = y_1$ et $v(t_2) = y_2$, on a $v(t_1 + \lambda t_2) = x_1 + \lambda x_2$, donc $w(x_1 + \lambda x_2) = u(t_1 + \lambda t_2) = u(t_1) + \lambda u(t_2) = w(x_1) + \lambda w(x_2)$. On a montré que w est linéaire.

Ensuite, soit T un supplémentaire de $\text{Ker } v$ dans E. On écrit $x = s + t$ avec $s \in \text{Ker } v$ et $t \in T$. On a alors :

$$w(v(x)) = w(v(s) + v(t)) = w(v(t)) = u(t) = u(t) + u(s) = u(x)$$

Donc on a prouvé le sens direct, $\Rightarrow$.

Il suffit maintenant d'appliquer la propriété démontrée avec $u = Id_E$, ce qui est possible car v est injective si et seulement si $\text{Ker } v \subset \text{Ker } Id_E = \{\vec{0}\}$.

Exercise 2.256 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.232.

Retour à Khôlle 84 : Semi-inverse des applications linéaires injectives.

2.85 Correction Khôlle 85 : Comparaison avec une fonction non-explicite

Retour à Khôlle 85 : Comparaison avec une fonction non-explicite.

Exercise 2.257 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.258 (Problème principal)**.** On a : $\forall t \in [0,x], t^2 \leq tx$, donc :

$$0 \leq \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^x e^{tx} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(e^{x^2} - 1\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, on a donc $\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t = o\left(e^{x^2}\right)$

Exercise 2.259 (Question subsidiaire)**.** Supposons que f ne soit pas continue (mais injective et ayant la propriété des valeurs intermédiaires). Soit alors a un point de discontinuité de f et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, |x-a| < \eta, |f(x)-f(a)| > \varepsilon$. On pose $y_+ = f(a)+\varepsilon/2$ et $y_- = f(a)-\varepsilon/2$. Soit b_0 tel que $|f(b_0)-f(a)| > \varepsilon$. Si $f(b_0) < f(a)-\varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_-$ grâce aux valeurs intermédiaires. Si $f(b_0) > f(a)+\varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_+$. Ensuite, on peut construire b_1 tel que $|b_1 - a| < |c_0 - a| (= \eta)$ et $|f(b_1)-f(a)| > \varepsilon$. Cela permet de construire $c_1 \in]b_1, a[$ tel que $f(c_1) \in \{y_-, y_+\}$. On a bien $c_0 \neq c_1$ (car $c_0 < b_1 < c_1$).

On poursuit ainsi pour construire des suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ tels que tous les c_n soient différents et que $\forall n, f(c_n) \in \{y_-, y_+\}$. Cela contredit le caractère injectif de f car on a trouvé plus de deux antécédents à un ensemble à deux éléments (on aurait d'ailleurs pu construire une suite de seulement 3 éléments). Ainsi, notre supposition était erronée : f est continue.

Supposons maintenant g non continue (mais ayant la propriété des valeurs intermédiaires et la fermeture des images réciproques sur $\mathbb{Q}$). Soit a un point de discontinuité de g. On peut reprendre le raisonnement précédent avec y_+ et y_- des rationnels différents de a (grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Plus précisément, on choisit une suite $(\eta_n)_n$ strictement positive qui tend vers 0, puis on construit par récurrence une suite $(c_n)_n$ qui vérifie $\forall n, g(c_n) \in \{y_-, y_+\}$ et $\eta_n > |c_n - a|$ (cela est possible car on peut toujours ajuster le choix de b_n dans le raisonnement précédent pour le rendre plus proche de a au besoin). Alors, on a $c_n \to a$ quand $n \to +\infty$, mais $\forall n, c_n \in (X_{y_-} \cup X_{y_+})$ qui est fermé, donc comme $(c_n)_n$ converge, sa limite est dans $X_{y_-} \cup X_{y_+}$, d'où $g(a) \in \{y_-, y_+\}$, ce qui n'est pas.

Finalement, g est continue.

Retour à Khôlle 85 : Comparaison avec une fonction non-explicite.

2.86 Correction Khôlle 86 : Développement d'un raccord de fonction

Retour à Khôlle 86 : Développement d'un raccord de fonction.

Exercise 2.260 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.261 (Problème principal)**.** On écrit le développement en 0^+ de f : pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^+ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

De la même manière, pour $x < 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^- en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Finalement, comme les prolongements ont le même développement limité en 0^- et en 0^+, la fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en entier, avec pour développement limité en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$.

Exercise 2.262 (Question subsidiaire)**.** Supposons que f n'est pas continue. Soit alors a un point de discontinuité de f. Comme f est croissante, $f(a)$ majore f sur $]0, a[$, donc, par le théorème de la limite monotone, f admet une limite en a^-. Cette limite ℓ est strictement inférieure à $f(a)$ sinon f serait continue en a. Mais par ce même théorème appliqué à $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a une limite pour g en a^- qui est strictement supérieure à $g(a) = \frac{f(a)}{a}$. Seulement, cette limite vaut $\frac{\ell}{a} < \frac{f(a)}{a}$...

Finalement, f ne peut être discontinue en aucun point : f est continue.

Retour à Khôlle 86 : Développement d'un raccord de fonction.

2.87 Correction Khôlle 87 : Développement d'une intégrale

Retour à Khôlle 87 : Développement d'une intégrale.

Exercise 2.263 (Question de cours)**. Cf cours !** Démonstration non-exigée.

Exercise 2.264 (Problème principal)**.** En notant F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on a : $f(x) = F(x^2) - F(x)$ et f est dérivable, avec :

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

En intégrant, on obtient : $f(x) = f(0) - x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$. Un calcul rapide donne $f(0) = 0$.

Exercise 2.265 (Question subsidiaire)**.** Soit X l'ensemble des points fixe de f. X est non vide car $x \mapsto f(x) - x$ est continue, positive en 0 et négative en 1 donc s'annule et ce point d'annulation est un point fixe de f. X admet donc une borne inférieure (X est bornée car inclus dans $[0, 1]$), m.

On a : $m \in X$ car on peut trouver une suite d'éléments, $(x_n)_n$ de X qui tend vers m quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\forall n, f(x_n) = x_n$, et par continuité de f, l'égalité passe à la limite en $f(m) = m$. g stabilise X car g commute avec f. En effet, si $x \in X$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ d'où $g(x) \in X$. Dès lors, $g(m) \geq m$ sinon on contredirait la minimalité de m.

On peut construire la suite $(g^n(m))_n$ (où g^n désigne $g \circ g \circ ... \circ g$, n fois). Cette suite est croissante par récurrence immédiate, car g est croissante : $g^{n+1}(m) \geq g^n(m)$ est vrai pour $n = 0$ et si cela est vrai pour un n fixé, alors on peut appliquer la fonction croissante g des deux côtés pour obtenir $g^{n+2}(m) \geq g^{n+1}(m)$. Cette suite est majorée car c'est une suite dans $[0, 1]$: elle admet une limite ℓ.

On va montrer que $f(\ell) = g(\ell) = \ell$: c'est le point fixe commun recherché. D'une part, la suite $(g^n(m))_n$ est dans X par récurrence car g stabilise X. Il s'ensuit que sa limite est aussi dans X car f est continue (on a déjà vu cet argument pour prouver que $m \in X$) : $f(\ell) = \ell$. D'autre part, ℓ est le limite de $g^n(m)$ quand $n \to +\infty$, de fait, en passant à la limite dans $g^{n+1}(m) = g(g^n(m))$, par continuité de g, on a $g(\ell) = \ell$.

Retour à Khôlle 87 : Développement d'une intégrale.

2.88 Correction Khôlle 88 : Développement d'une réciproque

Retour à Khôlle 88 : Développement d'une réciproque.

Exercise 2.266 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.267 (Problème principal)**.** f est strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\mathcal{C}^\infty$, et impaire. On a aussi : $f(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$ par un calcul de limites. f admet donc une réciproque définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, impaire et $\mathcal{C}^\infty$.

Le développement à l'ordre 6 de f en 0 est : $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$. On note en outre le développement à l'ordre 6 de f^{-1} : $f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)$. On sait que $f^{-1} \circ f(x) = x$, d'où, par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ \frac{2}{3}a_1 + a_3 & = 0 \\ \frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5 & = 0 \end{cases}$$

Finalement, on résout : $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{16}{15}$ et :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6)$$

Exercise 2.268 (Question subsidiaire)**.** a) Par l'absurde : Supposons que ni $f > g$, si $g > f$, alors il existe x, y tels que $f(x) > g(x)$ et $f(y) < g(y)$. Mais alors la fonction $f - g$ est continue, positive et négative. Elle s'annule donc par le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists z, f(z) = g(z)$. Par symétrie d'argument, on peut supposer $f > g$. Comme $f - g$ est continue strictement positive sur un segment, on peut trouver $\alpha = \inf_{[0,1]} f - g > 0$. Dès lors : $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$. Ensuite :

$$\forall x, f(f(x)) \geq g(f(x)) + \alpha = f(g(x)) + \alpha \geq g(g(x)) + \alpha + \alpha = g^2(x) + 2\alpha$$

En itérant cet argument, on en déduit que $\forall n, x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$. Mais en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $f^n(x) \geq +\infty$, alors que $f(x) \in [0,1]$. De cette absurdité découle l'existence d'un point commun à f et g.

b) Par les points fixes : X n'est pas vide car $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - x$ est continue avec $\tilde{f}(0) \geq 0$ et $\tilde{f}(1) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\tilde{f}$ s'annule, c'est-à-dire que f admet un point fixe. Comme X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné (inclus dans $[0,1]$), il admet une borne inférieur et une borné supérieure, nommons-les x_m et x_M. Soit une suite de points de X, $(x_k)_k$ qui tend vers x_m. On a : $\forall k, f(x_k) = x_k$ car $x_k \in X$. Par continuité, l'égalité passe à la limite et on trouve que : $f(x_m) = x_m$, ce qui induit que cette borne inférieure est atteinte, c'est un minimum. De la même manière, x_M est un maximum. En outre, g stabilise X. En effet, soit $x \in X$, alors, par commutation, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, donc $g(x)$ est un point fixe de f. De fait, $g(x_m) \in X$, et par minimalité de x_m, on obtient que $g(x_m) \geq x_m$. Pareillement, $g(x_M) \leq x_M$. Cela donne que $g - f$ est continue, d'abord positive (en x_m), puis négative. Ainsi, elle s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires, donc on peut trouver un point tel que $f(y) = g(y)$.

Retour à Khôlle 88 : Développement d'une réciproque.

2.89 Correction Khôlle 89 : Approximant de Padé

Retour à Khôlle 89 : Approximant de Padé.

Exercise 2.269 (Question de cours)**. Cf cours !**

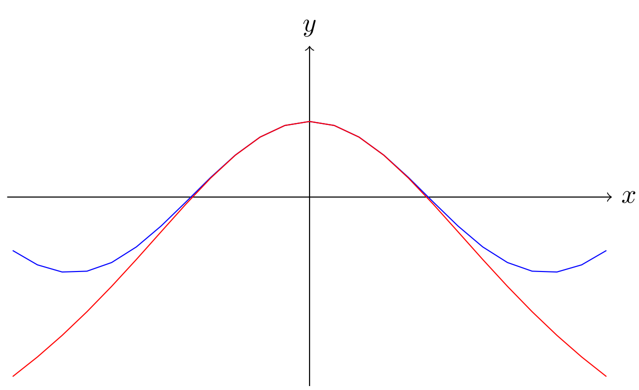
Exercise 2.270 (Problème principal)**.** On peut développer $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + b(b-a)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^7)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que si on veut que la partie principale est du plus grand degré possible, il faut d'abord que $a - b = -\frac{1}{2}$ et $b(b-a) = \frac{1}{24}$, donc :

$$a = -\frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}$$

On obtient alors : $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \sim \frac{1}{480}x^6$, et il est impossible de faire mieux.



Exercise 2.271 (Question subsidiaire)**.** Soient $A = \{x \in I; f(x) = c \text{ et } \exists y, x < y, f(y) = d\}$ et $a = \sup A$. Soit $B = \{x > a; f(x) = d\}$ et $b = \inf B$.

Soit une suite de points de A qui tend vers a, disons $(a_n)_n$, alors $\forall n, f(a_n) = c$, et par continuité de f, $f(a) = c$. De même, $f(b) = d$. En outre, $a < b$ car $b \in B \subset [a, +\infty[\cap I$.

On va prouver que $f([a,b]) = [c,d]$. Tout d'abord, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[c,d] \subset f([a,b])$ car $c \in f([a,b])$ et $d \in f([a,b])$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) < c$, alors $x > a$ et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver $y \in [x,b]$ tel que $f(y) = c$ (car $f(x) < c < f(b)$). Cependant, on a alors trouvé y tel que $f(y) = c$ et $b > y$ avec $f(b) = d$ mais aussi $y > a$, ce qui contredit la maximalité de a. Inversement, s'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > d$ et $x < b$, alors on peut trouver par le théorème des valeurs intermédiaires $y \in [a,x]$ qui contredit la minimalité de b car $f(y) = d$ mais $a < y < b$. Finalement, $f([a,b]) \subset [c,d]$ et on a montré l'égalité.

Retour à Khôlle 89 : Approximant de Padé.

2.90 Correction Khôlle 90 : Équation différentielle

Retour à Khôlle 90 : Équation différentielle.

Exercise 2.272 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.273 (Problème principal)**.** Notons $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Puis :

$$2xy''(x) = \sum_{k=2}^{n+1} 2k(k-1)a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$x^2 y(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^{k+2} + o(x^n)$$

En sommant, (E) induit :

$$-a_1 + 2a_2 x + \sum_{k=2}^{n} \left((k+1)(2k-1)a_{k+1} + a_{k-2}\right) x^k = o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on trouve : $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall k \geq 2, a_{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(2k-1)} a_{k-1}$. Cela nous donne pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$ et $a_{3p} = \frac{(-1)^p 2^p}{9^p (2p)!} a_0$.

On peut constater que toutes les fonction $x \mapsto \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$. On a très envie de poser le changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$ et $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$, on obtient que $z'' + z = 0$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$$

Puis sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = A\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + B\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$$

Pour résoudre le problème de raccordement sur $\mathbb{R}$, on se rend compte grâce au développement limité qu'il faut et qu'il suffit que $\lambda = A$ et $\mu = B = 0$.

Exercise 2.274 (Question subsidiaire)**.** Soit $y \in f(A)$ et $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme B est dense dans A, on peut trouver une suite $(x_n)n \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$. Comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$, donc on a construit une suite d'éléments de $f(B)$ qui tend vers $f(x) \in A$. Ainsi, $f(B)$ est dense dans $f(A)$.

Le groupe $\mathbb{Z}[2\pi]$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $2\pi \notin \mathbb{Q}$ (exercice classique sur les groupes), donc, comme cos est une fonction continue, on a que $\cos(\mathbb{Z}[2\pi]) = \{\cos(n + 2k\pi); n, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ (on a utilisé la parité de cos et sa 2π-périodicité) est dense dans $\cos(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.

Retour à Khôlle 90 : Équation différentielle.

2.91 Correction Khôlle 91 : Approximant de Padé

Retour à Khôlle 91 : Approximant de Padé.

Exercise 2.275 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.276 (Problème principal)**.** L'application tan est impaire, $\mathscr{C}^\infty$ et bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. En particulier $\tan^{-1}$ est impaire et $\mathscr{C}^\infty$, donc admet un développement à l'ordre 6 de la forme $\tan^{-1} x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$.

Or on sait que :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

On peut regarder ou bien $\tan^{-1} \circ \tan x = x$ ou bien $\tan \circ \tan^{-1} x = x$. La première équation est plus aisée. On obtient en substituant :

$$\begin{aligned} x &= a\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right) + b\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^3 + c\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^5 + O(x^7) \\ &= ax + \left(\frac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\frac{2a}{15} + 3 \times \frac{b}{3} + c\right)x^5 + O(x^7) \end{aligned}$$

On peut alors résoudre le système (l'identification se justifie par l'unicité du développement limité) :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ \frac{a}{3} + b & = 0 \\ \frac{2a}{15} + b + c & = 0 \end{cases}$$

D'où : $a = +1$, $b = -1/3$ et $c = +1/5$. En fait, $\tan^{-1}$ admet un développement limité à n'importe quel ordre : $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

On remarque que la fonction f est aussi impaire et $\mathscr{C}^\infty$. Pour en avoir un développement limité à l'ordre 6, il faut calculer un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 5. On a :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + O(h^6) \\
\frac{1}{1+2\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^6)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right)^2\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right)x^4\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{36}x^4\right) + O(x^6)
\end{aligned}$$

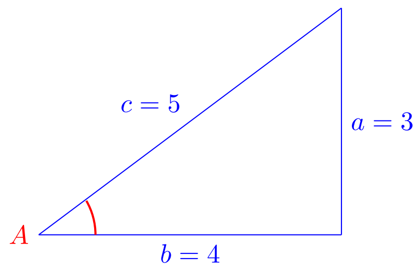
$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)$$

Ainsi, on constate que $f(x)$ est une approximation raisonnablement précise de $\tan^{-1} x$ pour x petit. Notamment, leurs développements concordent à l'ordre 4 et on a $\frac{1}{5} = \frac{7}{35} \simeq \frac{7}{36}$ avec $\frac{7}{36} \leq \frac{1}{5}$. De fait : $f(x) \approx \tan^{-1} x$ avec $f(x) \leq \tan^{-1} x$ pour x suffisamment petit. En poussant le développement de f plus loin, on se rend compte que les coefficient ne s'éloignent de ceux $\tan^{-1}$ que très lentement, ce qui donne un très très bonne approximation, même pour des x assez grands.

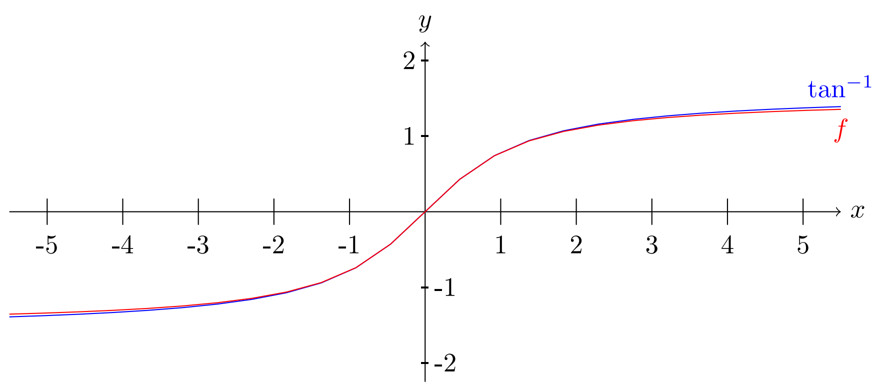
Dans un triangle rectangle, on a : $\tan A = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$. Comme A est le plus petit des trois angle, sa tangente est la plus petite des trois (tan est croissante), donc $\frac{a}{b}$ peut être considéré raisonnablement petit (on peut toujours choisir l'angle de sorte que $\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \leq 1$). Dès lors :

$$A = \tan^{-1}\frac{a}{b} = \frac{3a/b}{1 + 2\sqrt{1 + (a/b)^2}} = \frac{3a}{b + 2c}$$

On a l'avantage d'avoir une forme très facile à calculer à la main (même pas de carrés à calculer) qui donne une bonne approximation des trois angles. Sur la figure ci-dessous, l'angle A vaut $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$ et on a $\frac{3a}{b+2c} = \frac{3\times 3}{4+2\times 5} = \frac{9}{14} \approx 0.6429$ alors qu'on a pris (volontairement) un triangle avec $\frac{a}{b}$ très grand.



Regardons à quel point $\tan^{-1}$ est bien approximé par f :



Exercise 2.277 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.270.

Exercise 2.278 (Question subsidiaire)**.** En 0, on a :

$$\begin{aligned}
x\ln f(x) &= \ln\left(\frac{1}{2}(e^{x\ln a} + e^{x\ln b})\right)\\
&= \ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) + o(x^2)\right)\\
&= 1 + x\ln\sqrt{ab} + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) - \frac{1}{2}\left(x\ln\sqrt{ab}\right)^2 + o(x^2)\\
&= x\ln\sqrt{ab} + \frac{x^2}{8}\ln^2\frac{a}{b} + o(x^2)\\
f(x) &= \exp\left(\ln\sqrt{ab} + \frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b} + o(x)\right) = \sqrt{ab}\left(1 + \frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}\right) + o(x)
\end{aligned}$$

f est ainsi prolongeable par $\sqrt{ab}$ en 0 et dérivable avec $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b} > 0$.

En $+\infty$, on a (avec $0 < a < b$) :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln b^x - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{a^x}{b^x}\right)\right) \longrightarrow \ln b$$

De fait, f converge vers b.
En $-\infty$, on peut écrire $f(-x) = \frac{ab}{f(x)}$ pour conclure que $f(x) \to_{-\infty} a$.

Reste à calculer la dérivée pour $x \neq 0$. f étant strictement positive, on peut déterminer ses variations en regardant $(\ln f)'(x)$:

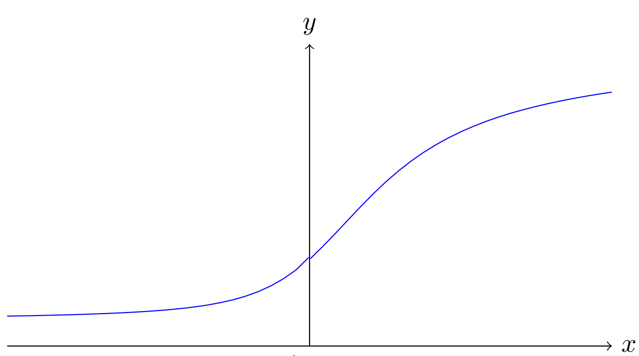
$$(\ln f)'(x) = \frac{-1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}$$

On pose $g(x) = x^2(\ln f)'(x)$ dont on cherche le signe. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$g'(x) = x\frac{(ab)^x(\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}$$

Il s'ensuit que g admet un minimum global (strict) en 0 (plus précisément sa limite en 0 est son infimum sur $\mathbb{R}$) : $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$, et ainsi $g > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $f' > 0$ et f strictement croissante.

NB : On remarquera que l'inégalité $\lim_{-\infty} f(x) < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{+\infty} f(x)$ redonne l'inégalité bien connue entre a, b et les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.



$a = \frac{1}{3},\ b = 4$

Retour à Khôlle 91 : Approximant de Padé.

2.92 Correction Khôlle 92 : Développement limité et combinatoire

Retour à Khôlle 92 : Développement limité et combinatoire.

Exercise 2.279 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.280 (Problème principal)**.** On effectue une séparation en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1+x}$$

Donc, comme on connaît le développement de chacun des fractions (le développement de $\frac{1}{(1-x)^2}$ s'obtient en dérivant celui de $\frac{1}{1-x}$), on obtient pour tout n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n)$$

D'autre part, on constate que $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, donc on a aussi :

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} x^{2j}\right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+2j=k} 1 \times 1\right) x^k + o(x^n)$$

Finalement, en identifiant les coefficients, on trouve qu'il y a $\frac{1}{4}(2k+3+(-1)^k)$ manières d'écrire k sous la forme $k = p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Exercise 2.281 (Question subsidiaire)**.** On connaît la dérivée de $s \mapsto \arcsin x$: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On a le développement à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

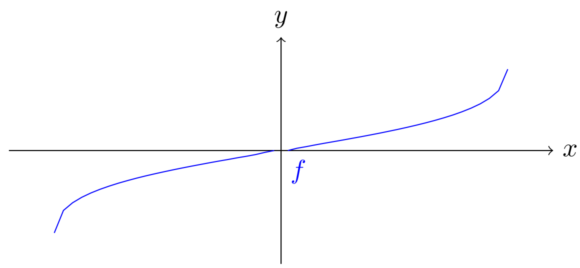
On intègre ensuite en calculant $\arcsin(0) = 0$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

Dès lors, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin x} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4\right)^2\right) + o(x^3) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)$, donc on peut prolonger f par $f(0) = 0$ et $\mathcal{C}_f$ admet alors une tangente en $(0,0)$ de pente $+\frac{1}{6}$. La courbe traverse (avec inflexion) sa tangente.



Retour à Khôlle 92 : Développement limité et combinatoire.

2.93 Correction Khôlle 93 : Convergence de l'exponentielle

Retour à Khôlle 93 : Convergence de l'exponentielle.

Exercise 2.282 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.283 (Problème principal)**.** On a, quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Dès lors, on trouve :

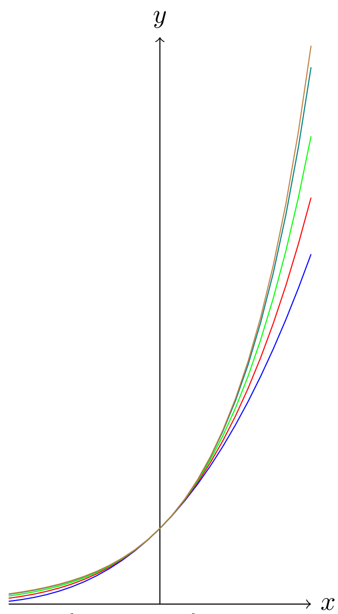
$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &= e^{a+b}\left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n}\right) - e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1 - \frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= e^{a+b}\left(\frac{1}{2n}(-(a+b)^2 + a^2 + b^2)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-abe^{a+b}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme $ab \neq 0$, on a bien trouvé un équivalent de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.

Pour estimer $e^{-a}f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$, on doit pousser un cran plus loin le développement limité de ln et de exp :

$$\begin{aligned} e^{-a}f_n(a) &= e^{-a}\exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{a^2}{2n} + \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ (et même $a \notin \{0, -8/3\}$), on a trouvé un équivalent de $e^{-a} f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$. On constatera d'ailleurs que cette suite ne converge pas très rapidement vers l'exponentielle.



$n \in \{3, 5, 10, 50\}$, $x \mapsto e^x$

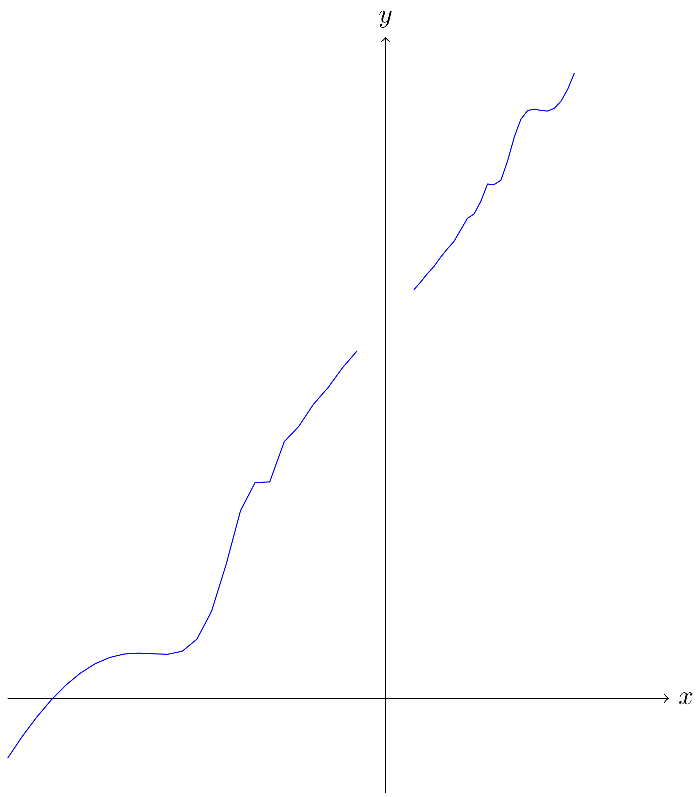
Exercise 2.284 (Question subsidiaire)**.** On a $|\sin \frac{1}{x^2}| \leq 1$, donc $x^3 \sin \frac{1}{x^2} = O(x^3) = o(x^2)$, d'où, au voisinage de 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

f est continue et dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1. On obtient au passage que $f'(0) = 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et somme. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

f' n'est donc pas continue au voisinage de 0. Pour le constater, on peut regarder que $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \to -1$ et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2n\pi}}\right) \to 1$ alors que les deux suites d'argument tendent vers 0. On ne peut donc pas trouver de développement limité d'ordre 0 pour f'.

Mon ordinateur a beaucoup de mal à tracer la courbe sur $\left[-1, \frac{3}{4}\right]$.



Retour à Khôlle 93 : Convergence de l'exponentielle.

2.94 Correction Khôlle 94 : Stabilisation polynomiale du cercle

Retour à Khôlle 94 : Stabilisation polynomiale du cercle.

Exercise 2.285 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.286 (Problème principal)**.** Les polynômes de la forme $P = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ sont des solutions évidentes au problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. $\mathcal{S}$ est stable par composition car c'est un sous-ensemble des applications de $\mathbb{U}$ sur lui-même. Il est aussi stable par multiplication des polynômes.

Si on suppose que tous les éléments de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors on peut raisonner par récurrence. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré non nul, alors P s'annule en 0 par hypothèse. Soit Q tel que $P = XQ$. Soit $\lambda \in \mathbb{U}$, alors $Q(\lambda) = {}^{P(\lambda)}/_{\lambda} \in \mathbb{U}$, donc $Q \in \mathcal{S}$ avec $\deg Q = \deg P - 1$. Il suffit maintenant de trouver les polynômes constants de $\mathcal{S}$. Il est évident que si $P \in \mathcal{S}$ est constant, alors cette constante est un λ de $\mathbb{U}$. Ainsi, si tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors :

$$\mathcal{S} = \{\lambda X^n ; \lambda \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons maintenant que tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré n. On pose $Q = X^n P(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$. Contrairement à ce qu'il semble, Q est un polynôme (le X^n contrebalance le $\overline{P}(\frac{1}{X})$). Or si $z \in \mathbb{U}$, on a : $\overline{P}(\frac{1}{z}) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, donc $P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = P(z)\overline{P(z)} = |P(z)|^2 = 1$ car $P(z) \in \mathbb{U}$. Finalement, $Q(z) = z^n \times 1$, et Q coïncide avec X^n sur $\mathbb{U}$. De fait (comme $\mathbb{U}$ est infini), $Q = X^n$ sur $\mathbb{C}$, et on a $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$. On va utiliser cette égalité sur $\mathbb{R}$. Comme P est continue et diverge en $+\infty$, en faisant tendre $z \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), on obtient que $P(0) = 0$ (sans quoi on aurait $\pm\infty \times P(0) = 1$). On a bien montré ce qu'on voulait.

Si $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, on a en particulier l'inclusion, donc $P \in \mathcal{S}$. Or toutes les fonctions **non constantes** de $\mathcal{S}$ sont bijectives sur $\mathbb{U}$, donc :

$$P(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{U}, \underline{n \in \mathbb{N}^*}, P = \lambda X^n$$

Exercise 2.287 (Question subsidiaire)**.** ψ est linéaire car :

$$\psi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q) \circ (X + 1) - (P + \lambda Q) = \psi(P) + \lambda\psi(Q)$$

Soit $P \in \text{Ker } \psi$. Alors soit d son degré. On se place dans $\mathbb{C}$. Si P n'est pas un polynôme constant non nul, alors il admet une racine (théorème d'Alembert-Gauss), soit z celle-ci. Dans ce cas, $z + 1$ est aussi une racine de P car $P(z + 1) = P(z) = 0$. En fait, P a plus de racine que son degré car $z + k$ est racine pour tout k. Ainsi, par ce raisonnement par l'absurde, nous avons montré que $P \in \text{Ker } \psi \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}_1[X]$. Comme l'inclusion réciproque si vérifie aisément, on a bien $\text{Ker } \psi = \mathbb{R}_1[X]$.

[L'argument qui suit pourra être pleinement mené une fois vu le chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie.] On se place maintenant dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathbb{R}_1[X] + \dim \psi(\mathbb{R}_n[X]) = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Or $\deg \psi(P) \leq n - 1$ car le coefficient de $P(X + 1)$ et de $P(X)$ sur X^n sont les mêmes. De fait, $\psi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a même égalité par l'égalité des dimensions.

On fixe $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a alors :

$$P(X + 1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X + 1)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k \right) X^j$$

Ainsi, le coefficient de $\psi(P)$ sur X^j est $\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k - a_j$. En particulier on peut calculer le coefficient de X^{d-1} : $\binom{d-1}{d-1} a_{d-1} + \binom{d}{d-1} a_d - a_{d-1} = d a_d \neq 0$ On a donc prouvé que $\deg \psi(P) = \deg P - 1$ et $dom(\psi(P)) = \deg P \times dom(P)$.

On a de quoi faire une somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n} \psi(P)(k) = P(n + 1) - P(0) \sim dom(P) \times n^{\deg P}$. En particulier, si on trouve P tel que $\psi(P) = X^r$, on aura un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^r$ comme souhaité. On sait qu'un tel P existe dans $\mathbb{R}_{r+1}[X]$ car $\psi(\mathbb{R}_{r+1}[X]) = \mathbb{R}_r[X]$. On sait aussi qu'on veut $dom(\psi(P)) = 1$ et $\deg \psi(P) = r$, donc, d'après les résultats établis, on a $\deg P = r + 1$ et $dom(P) \times (r + 1) = 1$. On obtient finalement : $\sum_{k=0}^{n} k^r \sim \frac{1}{r+1} n^{r+1}$.

Retour à Khôlle 94 : Stabilisation polynomiale du cercle.

2.95 Correction Khôlle 95 : Lemme de Thom, Système complexe élémentaire

Retour à Khôlle 95 : Lemme de Thom, Système complexe élémentaire.

Exercise 2.288 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.289 (Problème principal)**.** On peut raisonner par récurrence sur le degré maximal des polynômes dans $\mathcal{F}$. Supposons que $E_{\mathcal{F}}$ est in intervalle pour toute famille $\mathcal{F}$ telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n$ (n fixé).

Soit $\mathcal{F}$ une famille telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n+1$. On pose $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ la sous-famille des polynômes de degré exactement $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $E_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}}$ est un intervalle. Soient $x, y \in E_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}}$ ($x \neq y$). Soit $z \in]x, y[$ et $P \in \mathcal{G}$. Si $P(z)$ n'est pas du signe de ε_P (qui est le signe de $P(x)$ et de $P(y)$), alors P n'est pas monotone sur $[x, y]$: **faire un dessin**. Dès lors, en dérivant, P' n'est pas de signe constant sur $[x, y]$. Cependant, $P' \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{G}$ car la famille est stable par dérivation, mais comme $[x, y] \subset E_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}}$ qui est un intervalle, P' ne change pas de signe sur $[x, y]$. Cette contradiction montre que $E_P \cap E_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}}$ est un intervalle, et on a :

$$E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P\in\mathcal{G}} E_{\{P\}\cup(\mathcal{F}\setminus\mathcal{G})} = \bigcap_{P\in\mathcal{G}} \left(E_P \cap E_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{G}}\right)$$

Finalement, $E_{\mathcal{F}}$ est bien un intervalle.

Par récurrence, pour toute famille $\mathcal{F}$ (même infinie) de polynômes, et tout ensemble de signes $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}}$, l'ensemble $E_{\mathcal{F}}$ est un intervalle.

Exercise 2.290 (Question subsidiaire)**.** On va résoudre le système plus général :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xyz = b \\ |x| = |y| = |z| \end{cases}$$

Avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Commençons par remarquer que la deuxième ligne donne $|xyz| = |b|$, d'après la troisième ligne, on obtient $|x|^3 = |b|$. On note $d = \sqrt[3]{|b|}$ pour plus de commodité, et on a : $|x| = |y| = |z| = d$. On cherche à exprimer $xy + yz + zx$ afin d'avoir toutes les fonctions symétriques élémentaires et de pouvoir dire de quel polynôme (de degré 3) x, y et z sont les racines.

On a : $xy+yz+zx = xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. On peut noter $x = d\lambda$, $y = d\mu$ et $z = d\nu$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{U}$. On obtient :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{d}\left(\overline{\lambda}+\overline{\mu}+\overline{\nu}\right) = \frac{1}{d^2}(\overline{x+y+z}) = \frac{\overline{a}}{d^2}$$

Finalement, on trouve : $xy+yz+zx = \frac{\overline{a}b}{d^2}$, et x, y et z sont les 3 racines de $X^3 - aX^2 + \frac{\overline{a}b}{d^2}X - b$. Il est possible de résoudre cette équation en toute généralité, cependant, on se limitera à $a = b = 1$. Dans ce cas, on cherche les racines de : $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

1 est racine évidente de P. On en déduit la factorisation : $P = (X-1)(X^2+1)$. Finalement : $\{x,y,z\} = \{1, i, -i\}$ (on prendra le temps de vérifier que cette solution fonctionne).

Retour à Khôlle 95 : Lemme de Thom, Système complexe élémentaire.

2.96 Correction Khôlle 96 : Croisement de Ghys, Inversion de matrice

Retour à Khôlle 96 : Croisement de Ghys, Inversion de matrice.

Exercise 2.291 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.292 (Problème principal)**.** On trouvera la solution ici.

Exercise 2.293 (Question subsidiaire)**.** Supposons le membre de gauche vérifié, alors :

$$f(X) = \sum_i \sum_j \binom{j}{i} h_j X^i = \sum_j h_j \sum_i \binom{j}{i} X^i = \sum_j h_j (X+1)^j = h(X+1)$$

Réciproquement, si $f(X) = h(X+1)$, alors on a $f(X) = \sum_i \left(\sum_j \binom{j}{i} h_j\right) X^i$, donc en identifiant les coefficients, on retrouve l'égalité souhaitée.

Si on a l'égalité de gauche, alors on a $f(X) = h(X+1)$, donc $h(X) = f(X-1)$, puis en développant :

$$h(X) = \sum_i f_i (X-1)^i = \sum_i \sum_j (-1)^j \binom{i}{j} f_i (-X)^j = \sum_j \left(\sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i\right) X^j$$

En identifiant les coefficients, on trouve que $\forall i, h_i = \sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i$.

Retour à Khôlle 96 : Croisement de Ghys, Inversion de matrice.

2.97 Correction Khôlle 97 : Équivalent de la série des puissances

Retour à Khôlle 97 : Équivalent de la série des puissances.

Exercise 2.294 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.295 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.287.

Exercise 2.296 (Question subsidiaire)**.** Δ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ par produit. On a :

$$\begin{aligned}\Delta(x) = &- f'(x)(g(b)-g(x)) - g'(x)(f(a)-f(x)) \\ &+ g'(x)(f(b)-f(x)) + f'(x)(g(a)-g(x)) \\ =& f'(x)(g(a)-g(b)) + g'(x)(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

On a aussi $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle pour obtenir :

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des accroissements finis. Ce théorème en est une généralisation.

Retour à Khôlle 97 : Équivalent de la série des puissances.

2.98 Correction Khôlle 98 : Système complexe élémentaire, Suite contractée

Retour à Khôlle 98 : Système complexe élémentaire, Suite contractée.

Exercise 2.297 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.298 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.290.

Exercise 2.299 (Question subsidiaire)**.** Si $u_1 < u_0$, alors, du fait de la croissance de f, on démontre par récurrence que $(u_n)_n$ est décroissante positive donc convergente, disons vers ℓ ; et par continuité de f, on a $f(\ell) = \ell$.

Si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_n$ est croissante. On va montrer qu'elle est convergente car majorée. Supposons qu'elle ne soit pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. Mais alors, à partir d'un certain rang, $\frac{f(u_n)}{u_n} \leq k + \varepsilon$ avec $k + \varepsilon < 1$. Mais dans ce cas, $u_{n+1} < (k+\varepsilon)u_n < u_n$, ce qui contredit la croissance. Finalement, $(u_n)_n$ est bornée et donc convergente (vers un point fixe de f).

Dans tous les cas, $(u_n)_n$ converge. On vient au passage de montrer que f a un point fixe.

Retour à Khôlle 98 : Système complexe élémentaire, Suite contractée.

2.99 Correction Khôlle 99 : Inversion de matrice, Accroissements finis forts

Retour à Khôlle 99 : Inversion de matrice, Accroissements finis forts.

Exercise 2.300 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.301 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.293.

Exercise 2.302 (Question subsidiaire)**.** f' étant continue, elle est bornée sur $[a,b]$, on peut donc poser $M = \sup_x f'(x)$. On construit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et en b : $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Enfin, soit $h = f - g$. On remarque que $h(a) = h(b) = 0$. En outre, h est continue et dérivable sur $[a,b]$ avec $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Supposons que $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors $h'(x) = f'(x) - M \leq 0$: h est décroissante. Sauf que $h(a) = h(b) = 0$. De fait, h est constante et même nulle. Finalement, $f = g$, f est affine.

Retour à Khôlle 99 : Inversion de matrice, Accroissements finis forts.

2.100 Correction Khôlle 100 : Méthode des trapèzes

Retour à Khôlle 100 : Méthode des trapèzes.

Exercise 2.303 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.304 (Problème principal)**.** Posons $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ avec A tel que $g(a) = g(b)$, ce qui est possible en posant $A = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right)\right)$.

g est $\mathcal{C}^1$ et deux fois dérivable, avec :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2$$

$$g''(x) = \frac{x-a}{2}\left(-12A - f^{(3)}(x)\right)$$

On constate que $g'(a) = 0$, et en outre, comme $g(a) = g(b)$, que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe, par le théorème de Rolle $d \in]a,b[$ tel que $g'(d) = 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Rolle sur $[d,a]$ pour g', et on il existe $c \in]d,a[$ tel que $g''(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$$

En écrivant explicitement $g(b) = 0$, on trouve l'égalité souhaitée.

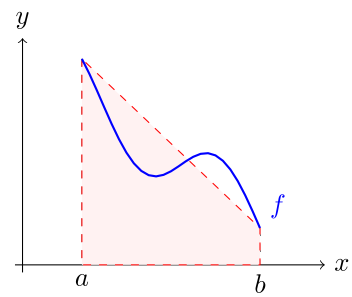
Si on prend F une primitive de f, alors cette égalité donne :

$$\exists c \in]a,b[, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3$$

Cela signifie que l'aire du domaine entre $x = a$, $x = b$ et $y = 0$, $y = f(x)$ (c'est-à-dire $A_1 = \int_a^b f$) est "bien approchée" par l'aire A_2 du trapèze défini par les 4 points $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et $(b, 0)$, au sens où :

$$|A_1 - A_2| \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|\right) \frac{(b-a)^3}{12}$$

On a ici une approximation à l'ordre 3 en $(b - a)$ alors que l'approximation par la méthode des rectangles ne donne qu'une approximation à l'ordre 2.



Exercise 2.305 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.299.

Retour à Khôlle 100 : Méthode des trapèzes.

2.101 Correction Khôlle 101 : Critère d'Eisenstein

Retour à Khôlle 101 : Critère d'Eisenstein.

Exercise 2.306 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.307 (Problème principal)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, donc les coefficients sont divisibles par p mais dont le terme constant n'est pas divisible par p^2. Supposons que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$. D'après le lemme de Gauss, on peut prendre $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$, unitaires. Notons $P = X^n + \sum_k a_k X^k$, $Q = X^m + \sum_k q_k X^k$ et $R = X^l + \sum_k r_k X^k$, on a $a_k = \sum_{i+j=k} q_i r_j$ et $n = m + l$ $(a_n = q_m = r_l = 1)$. Comme p^2 ne divise pas $a_0 = q_0 r_0$, alors l'un des deux parmi q_0 et r_0 n'est pas divisible par p (et l'autre l'est), disons $p|q_0$ mais p ne divise pas r_0. Ensuite $a_1 = q_0 r_1 + q_1 r_0$, donc $p|q_1 r_0 = a_1 - q_0 r_1$, puis $p|q_1$. Ensuite $a_2 = q_0 r_2 + q_1 r_1 + q_2 r_0$, donc $p|q_2$, et ainsi de suite : $p|q_i$ pour tout $i \in [\![0, m - 1]\!]$.

Sauf que $a_m = q_0 r_m + q_1 r_{m-1} + ... + q_{m-1} r_1 + 1 \times r_0$. Donc $p|1$ par le même argument, c'est une contradiction. Finalement, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $P = X^2 + 15X + 10$, prenons $p = 5$, on a bien un polynôme unitaire avec p qui divise tous les coefficients sauf le coefficient dominant, et p^2 qui ne divise pas le terme constant : P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $H = X^2+X+2$, on a : $H(X+3) = (X^2+6X+9)+(X+3)+2 = X^2+7X+14$. Donc $p = 7$ garantit que $H(X+3)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Mais si H lui-même était réductible, disons $H = QR$, alors $H(X+3) = Q(X+3)R(X+3)$ est réductible. Donc H est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $F = \frac{X^p-1}{X-1}$ (qui est un polynôme car 1 est racine de $X^p - 1$), on a :

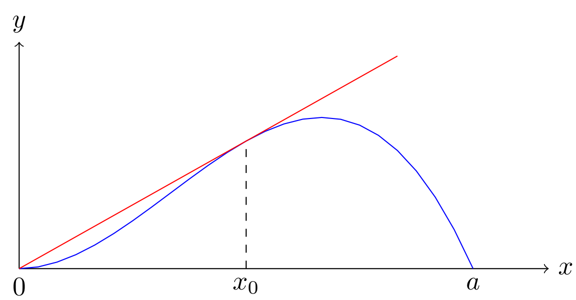
$$F(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k$$

Donc le polynôme est bien unitaire, son terme constant est $\binom{p}{1} = p$ (non-divisible par p^2), et tous ses coefficients sont divisibles par p (c'est un exercice classique) : $F(X+1)$ puis F sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercise 2.308 (Question subsidiaire)**.** On prendra $a > 0$ pour raisonner et faire des dessins (si $a < 0$, on peut regarder $x \mapsto f(-x)$).

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe de f est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Elle passe ainsi en $(0,0)$ si et seulement si $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$. **Faire un dessin !** On pose la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. D'après les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, g est continue en 0.

Ainsi, g est continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$ avec $g(0) = 0 = g(a)$. On applique le théorème de Rolle pour trouver x_0 en lequel $g'(x_0) = 0$. Comme $x_0 \neq 0$, une simple dérivation donne l'égalité recherchée : $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.



Retour à Khôlle 101 : Critère d'Eisenstein.

2.102 Correction Khôlle 102 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur

Retour à Khôlle 102 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur.

Exercise 2.309 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.310 (Problème principal)**.** Si $a \in \{x_k\}_k$, c'est évident car on a 0 des deux côtés.

On pose $A = \frac{f(a)}{\prod_k (a-x_k)}$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - A\prod_k (x - x_k)$. La fonction φ est n fois dérivable et s'annule en $n+1$ points distincts. Par le théorème de Rolle (appliqué sur les n différents intervalles), φ' est dérivable $n-1$ fois et s'annule n fois. De le même manière φ'' est dérivable $n-2$ fois et s'annule $n-1$ fois. En poursuivant, on montre par récursion que $\varphi^{(n)}$ au moins un zéro, disons $\lambda \in]x_1, x_n[$. On a alors :

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = f^{(n)}(\lambda) - n!A = f^{(n)}(\lambda) - n!\frac{f(a)}{\prod_{k=1}^{n}(a - x_k)} = 0$$

Puis :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a - x_k)$$

Exercise 2.311 (Question subsidiaire)**.** Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est constant, alors il envoie $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si cette constante est réelle. Si P est non constant, alors $P - i$ s'annule sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'Alembert-Gauss, donc P admet i dans son image : $P(\mathbb{C}) \not\subset \mathbb{R}$ (même, $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$).

Tous les polynômes à coefficients réels envoient $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, si P envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$$

Donc $P - \overline{P}$ a une infinité de racines : c'est le polynôme nul, $P = \overline{P}$, d'où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$. Réciproquement, on remarque que les polynômes de Lagrange sont à coefficient rationnels s'ils sont associés à des points rationnels. Fixons $d = \deg P$ et prenons les L_k pour les abscisses $x_k = i$, pour $k \in [\![0, d]\!]$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^{d} P(k)L_k$$

Ce polynôme est bien dans $\mathbb{Q}[X]$ car c'est une somme à coefficients rationnels de polynômes rationnels.

Retour à Khôlle 102 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur.

2.103 Correction Khôlle 103 : Centre du groupe des applications linéaires

Retour à Khôlle 103 : Centre du groupe des applications linéaires.

Exercise 2.312 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.313 (Problème principal)**.** On a déjà montré que si $(x, f(x))$ est liée pour tout x, alors f est une homothétie en Exercise 1.224.

Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec toutes les autres. Si $x = \vec{0}$, alors on a bien $f(x) = \vec{0} \in \{\vec{0}\} = \text{Vect}(x)$. Supposons $x \neq \vec{0}$ et posons $D = \text{Vect}(x)$. Comme E est de dimension finie, on peut construire H un supplémentaire de la droite D dans E (c'est vrai de beaucoup d'espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, comme de ceux qui ont une base, mais pas de tous). Soit s la symétrie par rapport à D et parallèlement à H. s commute avec f, donc, comme $x \in D$:

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x)$$

Ainsi, $s(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) \in D = \text{Vect}(x)$, et d'après la question précédente, f est un homothétie.

Réciproquement, si f est une homothétie, alors elle commute avec tous les éléments de $\mathscr{L}(E)$ car si $g \in \mathscr{L}(E)$, et $f(x) = \lambda x$, alors :

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = f(g(x))$$

Exercise 2.314 (Question subsidiaire)**.** Il y a deux possibilités. Ou bien on utilise la formule du cours qui indique que $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$ et on obtient immédiatement $\dim E^* = \dim E = n + 1$. Ou bien on en refait la démonstration. Soient E et F deux espaces de dimension finies, avec $n =\sim E$. Alors, on a la bijection $\mathscr{L}(E, F) \to F^n$ définie par $u \mapsto u(e_i)$ où $(e_i)_i$ est une base de E. Cette bijection est linéaire, c'est donc un isomorphisme et on a $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim F^n = n \times \dim F$.

Ainsi, comme la famille $(\varphi_k)_k$ est de cardinal $n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice pour obtenir que c'est une base de E^*. Soit $(\lambda_k)_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$ (l'application nulle). dès lors, on a en particulier :

$$\forall j, 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(X^j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{j!}{(j-k)!} \delta_{jk} = j! \lambda_j$$

Ainsi, $\forall j, \lambda_j = 0$ et la famille des $(\varphi_k)_k$ est libre, donc c'est une base.

Retour à Khôlle 103 : Centre du groupe des applications linéaires.

2.104 Correction Khôlle 104 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Retour à Khôlle 104 : Matroïde d'une configuration de vecteurs.

Exercise 2.315 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.316 (Problème principal)**.** Une famille vide est libre (par définition, il n'y a pas de dépendance linéaire dans cette famille de vecteurs). Donc, $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre (car on ne peut en trouver une dépendance linéaire) : $\forall X \in \mathcal{I}, Y \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

La vraie question commence ici. Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$. On pose $E_X = \mathrm{Vect}(v_i)_{i\in X}$ et idem pour E_Y. Imaginons que $\forall j \in Y, v_j \in E_X$, alors E_X contient une famille libre de taille $|Y|$, donc $\dim E_X = |X| > |Y|$, ce qui n'est pas. De fait, on peut prendre v_e, $e \in Y$ tel que $v_e \notin E_X$. Mais dans ce cas $(v_i)_{i\in X\cup\{e\}}$ est libre car elle est de cardinal $|X| + 1$ est engendre un espace de dimension $\geq |X| + 1$. Ainsi, $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$: on a bien un matroïde.

Exercise 2.317 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. Soit $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}\backslash\mathcal{G})$ un supplémentaire de G dans F. On a $H + G = F$ (mais nécessairement $H \oplus G = F$). On regarde les dimensions :

$$\begin{aligned}
&\dim F = s\\
&\dim G = s'\\
&\dim H \leq n - r\\
&\dim H + \dim G \geq \dim F
\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du fait qu'on a une famille génératrice de H de taille $n - r$ (la famille $\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}$).

La dernière inégalité vient de $H + G = F$ avec la formule de Grassmann : $\dim H + s' - \dim(H \cap G) = s$.

On en conclut que $s - s' \leq \dim H \leq n - r$, d'où $s' \geq s + r - n$.

Retour à Khôlle 104 : Matroïde d'une configuration de vecteurs.

2.105 Correction Khôlle 105 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces

Retour à Khôlle 105 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces.

Exercise 2.318 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.319 (Problème principal)**.** Cet exercice est complètement équivalent à l'**??**, mais la méthode est très différente.

On va raisonner par récurrence et par l'absurde.

E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n = 1$ sous-espace strict.

Supposons maintenant que E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n - 1$ sous-espaces stricts (n fixé), mais que $E = \bigcup_{i=1}^n F_i$ avec F_i des sous-espaces stricts. On ne peut pas avoir $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^n$, sans quoi $E = \bigcup_{i=2}^n F_i$ et on aurait écrit E comme une réunion de $n - 1$ sous-espaces stricts. Soit alors $x \in F_1$ tel que $x \notin \bigcup_{i=2}^n F_i$. De même, on ne peut avoir $\bigcup_{i=2}^n F_i \subset F_1$ sinon $E = F_1$ (ce qui n'est pas car F_1 est un sous-espace strict). Prenons ainsi $y \in \bigcup_{i=2}^n F_i$ et $y \notin F_1$. On pose la fonction $\mathbb{K} \to [1, n]$:

$$f : \lambda \longmapsto \min\{i \ ; \ x + \lambda y \in F_i\}$$

Cette fonction est bien définie car $\forall \lambda, x + \lambda y \in E = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Elle est aussi injective ! En effet, trouvons d'abord les antécédents de 1. Si $f(\lambda) = 1$, alors $x + \lambda y \in F_1$, et comme $x \in F_1$ et que F_1 est un espace vectoriel, on obtient $y \in F_1$, ce qui n'est pas. Donc $f(\lambda)$ ne vaut jamais 1.

Maintenant, supposons que $f(\lambda) = f(\mu) = j \neq 1$, alors $u = x + \lambda y \in F_j$ et $v = x + \mu y \in F_j$, donc $\mu u - \lambda v \in F_j$ car F_j est un espace vectoriel, or, par commutativité de $\mathbb{K}$:

$$\mu u - \lambda v = \mu x + \mu\lambda y - \lambda x - \lambda\mu y = (\mu - \lambda)x \in F_j$$

Comme $j \neq 1$, on a $x \notin F_j$ et comme ce dernier est un espace vectoriel, on a $\mu - \lambda = 0$: on a montré que f est injective.

Seulement, on vient de définir une fonction injective d'un ensemble infini $\mathbb{K}$ vers l'ensemble fini $[1, n]$... On a bien abouti à une contradiction, et on en déduit que E ne peut pas s'écrire comme une réunion de n sous-espaces stricts (et par récurrence, quelque soit n).

Exercise 2.320 (Question subsidiaire)**.** Soit $(e_k)_k$ un base de E. On pose, pour chaque k, p_k tel que $f^{p_k}(e_k) = \vec{0}$ et $p = \max_k p_k$. On a alors, pour tout k : $f^p(e_k) = f^{p-p_k}\left(f^{p_k}(e_k)\right) = \vec{0}$. Soit maintenant $x \in E$ avec sa décomposition dans la base $(e_k)_k$: $x = \sum_k \alpha_k e_k$. On obtient :

$$f^p(x) = f^p\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^p(e_k) = \vec{0}$$

Ainsi, f est bien nilpotente.

Retour à Khôlle 105 : Impossible partition d'un espace en sous-espaces.

2.106 Correction Khôlle 106 : Base duale de $\mathbb{R}_n[X]$, L'autre produit

Retour à Khôlle 106 : Base duale de $\mathbb{R}_n[X]$, L'autre produit.

Exercise 2.321 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.322 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.314

Exercise 2.323 (Question subsidiaire)**.** Appelons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires associées à A et B respectivement. On sait que :

$$fg(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad fg(e_3) = e_3$$

Dès lors, $gf(g(e_2)) = g(e_2)$. De même, $gf(g(e_3)) = g(e_3)$. Donc, gf laisse la famille $(g(e_2), g(e_3))$ inchangée. Or cette famille est une base, en effet, si $ag(e_2) + bg(e_3) = \vec{0}$, alors, en appliquant f, on a $ae_2 + be_3 = \vec{0}$, donc $a = b = 0$ car (e_2, e_3) est libre.

Ainsi, l'endomorphisme gf laisse une base inchangée : c'est l'identité. Il s'ensuit que $BA = I_2$.

Retour à Khôlle 106 : Base duale de $\mathbb{R}_n[X]$, L'autre produit.

2.107 Correction Khôlle 107 : Rang d'une sous-famille, Base de projecteurs

Retour à Khôlle 107 : Rang d'une sous-famille, Base de projecteurs.

Exercise 2.324 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.325 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.317

Exercise 2.326 (Question subsidiaire)**.** $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si $p^2 = p$, donc $M \in \mathcal{M}_n$ est une matrice associée à un projecteur si $M^2 = M$.

Il est immédiat que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ car c'est une matrice diagonale. Ensuite, on a :

$$(E_{i,i} + E_{i,j})^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 = E_{i,i} + E_{i,j} + 0_n + 0_n$$

On a bien un projecteur. Enfin, remarquons que pour $i \neq j$: $E_{i,j} = (E_{i,i} + E_{i,j}) - E_{i,i}$. De fait, la famille des $(E_{i,i})_i \cup (E_{i,i} + E_{i,j})_{i \neq j}$ est une base de $\mathcal{M}_n$ (elle est génératrice et de bon cardinal). Comme cette famille est constituée de projecteurs, on a bien trouvé une base de projecteurs de $\mathscr{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n$.

Retour à Khôlle 107 : Rang d'une sous-famille, Base de projecteurs.

2.108 Correction Khôlle 108 : Application nilpotente, Carrés magiques

Retour à Khôlle 108 : Application nilpotente, Carrés magiques.

Exercise 2.327 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.328 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.320

Exercise 2.329 (Question subsidiaire)**.** On peut démontrer à la main que MG_n est un espace vectoriel, mais on peut aussi le faire efficacement : soit φ_i la forme linéaire qui a $M \in \mathcal{M}_n$ associe la somme de sa i-ième ligne, ψ_j la somme de sa

j-ième colonne et δ et d pour ses deux diagonales. Les Ker $(\varphi_i - \varphi_1)$ sont des hyperplans, et on a :

$$MG_n = \bigcap_{i=2}^{n} \text{Ker } (\varphi_i - \varphi_1) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \text{Ker } (\psi_j - \varphi_1) \cap \text{Ker } (\delta - \varphi_1) \cap \text{Ker } (d - \varphi_1)$$

Non seulement MG_n est un espace vectoriel (comme intersection d'espaces vectoriels), mais on sait qu'en tant d'intersections d'hyperplans, sa dimension est au moins $n^2 - (n-1) - n - 2 = n(n-2) - 2$. On va voir qu'en réalité, cette construction est maladroite dans le sens où la dimension de MG_n est $n(n-2)$.

On ne connaît pas la dimension de l'espace de départ, donc on va montrer que ϕ est un isomorphisme sans se servir des dimensions. D'une part, ϕ est linéaire. Ensuite, montrons la surjectivité. Soit $(A, a_1, ..., a_{n-2}) \in \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$. On sait déjà ce que vaut $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$. On sait aussi ce que doit valoir $m_{1,n}$ ainsi que $m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, ..., m_{n-1,n-2}$. Cherchons les autres coefficients, et notons $S = \sum_{i=1}^{n} m_{1,i}$ (valeur déjà déterminée par la première ligne). Puisqu'on connaît tous les coefficients de la j-ième ligne, avec $j \leq n-2$, sauf $m_{j,n}$, et que la somme des coefficients de la ligne doit valoir S, on détermine uniquement $m_{j,n}$ (qui vaut $S - \sum_{i<n} m_{j,i}$). On connaît aussi tous les coefficients de la première colonne, sauf $m_{n,1}$, et on sait que la somme fait S : ceci détermine uniquement $m_{n,1}$. On connaît ensuite tous les coefficient de la diagonale en bas à gauche vers en haut à droite sauf $m_{n-1,2}$. Ceci détermine uniquement ce coefficient (puisque la somme doit valoir S). On peut alors répéter le processus pour toutes les colonnes de la 2-ème à la $n-2$-ème : ceci détermine uniquement $m_{n,i}$ pour $i \leq n-2$. Reste à déterminer les quatre derniers coefficients, $m_{n-1,n-1}$, $m_{n-1,n}$, $m_{n,n-1}$ et $m_{n,n}$. Notons S_1 et S_2 la somme des coefficients déjà connus sur la colonne $n-1$ et sur la colonne n, S_3 et S_4 les sommes des coefficients déjà connus sur les lignes $n-1$ et n et S_5 la somme des coefficients déjà connus sur la diagonale principale. Une matrice magique solution doit vérifier le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} m_{n-1,n-1} & +m_{n,n-1} & & & = & S - S_1 \\ & & m_{n-1,n} & +m_{n,n} & = & S - S_2 \\ m_{n-1,n-1} & & +m_{n-1,n} & & = & S - S_3 \\ & m_{n,n-1} & & +m_{n,n} & = & S - S_4 \\ m_{n-1,n-1} & & & +m_{n,n} & = & S - S_5 \end{array}\right.$$

Dans ce système, une équation est redondante. En effet, si on fait $L_1 + L_2 - L_3$, on trouve à gauche $m_{n-1,n} + m_{n,n}$, comme dans le membre de gauche de L_4. Pour la partie droite, on trouve bien S_4 après quelques manipulations de sommes. Finalement, la bijectivité de ϕ se ramène à l'inversibilité de la matrice des quatre lignes L_1, L_2, L_3, L_5 du système ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{l'inverse étant} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, ϕ est bijective, et $MG_n \simeq \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, donc $\dim MG_n = (n-1)(n-2) + n - 2 = n(n-2)$.

Retour à Khôlle 108 : Application nilpotente, Carrés magiques.

2.109 Correction Khôlle 109 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan de matrices

Retour à Khôlle 109 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan de matrices.

Exercise 2.330 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.331 (Problème principal)**.** $H_3(A)$ est un sous-groupe du groupe $GL_3(A)$ car le produit de matrice triangulaires est triangulaire, l'inverse aussi, et la diagonale du produit vaut le produit des diagonales (donc la diagonale du produit est faite de 1, tout comme celle de l'inverse).

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+a', b+', c+c'+ab')$$

Ensuite, $(a,b,c)(-a,-b,-+ab) = (0,0,0) = I_3$, et, par récurrence immédiate $(a,b,c)^n = (na, nb, nc + \frac{n(n-1)}{2}ab)$.

Ensuite, en notant $x = (a,b,c)$ et $y = (a',b',c')$, on trouve :

$$\begin{aligned}
[x,y] &= (a,b,c)(a',b',c')(-a,-b,-c+ab)(-a',-b',-c'+a'b') \\
&= (a+a', b+b', c+c'+ab')(-a-a', -b-b', -c-c'+ab+a'b'+ab') \\
&= (0,0,ab+a'b'+2ab'-(a+a')(b+b')) \\
&= (0,0,ab'-a'b)
\end{aligned}$$

Le centre $Z(H_3(A))$ correspond aux éléments $x \in H_3(A)$ tel que $\forall y \in H_3(A),\ [x,y] = (0,0,0)$. En particulier, si $x = (a,b,c)$, on a :

$$\begin{cases} 0 = [x,(0,1,0)] & = a \\ 0 = [x,(-1,0,0)] & = b \end{cases}$$

Donc $x = (0,0,c)$. Réciproquement, si $x = (0,0,c)$, alors pour tout $y \in H_3(A)$, on a bien $[x,y] = (0,0,0)$. Finalement $Z(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$ (attention, pour dire que cela est isomorphe à A, il faut vérifier que la loi est la bonne).

D'autre part, si $x, y \in H_3(A)$, alors $[x,y] \in 0 \times 0 \times A$, donc $DG(H_3(A)) \subseteq 0 \times 0 \times A$. Réciproquement, pour $c \in A$, on a $[(c,0,0),(0,1,0)] = (0,0,c)$, donc $DG(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$.

Un groupe G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$ si et seulement si $DG(G) = 0$. Donc $H_3(A)$ est abélien si et seulement si $A = 0$ (l'anneau trivial).

Dans $H_3(\mathbb{Z})$, remarquons que $[(1,0,0),(0,1,0)] = (0,0,1)$, que $(1,0,0)^{-1} = (-1,0,0)$ et que $(0,1,0)^{-1} = (0,-1,0)$. De fait, pour $a,b,c \in \mathbb{Z}$, on a : $(1,0,0)^a(0,1,0)^b = (a,0,0)(0,b,0) = (a,b,ab)$. Dès lors (rappel : $H_3(\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif) :

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b(0,0,1)^{-ab} \\ &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b[(1,0,0),(0,1,0)]^{-ab} \\ &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b\left((0,1,0)(1,0,0)(0,1,0)^{-1}(1,0,0)^{-1}\right)^{ab}\end{aligned}$$

Finalement, $H_3(\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$, engendré comme groupe.

Exercise 2.332 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Notons-là grâce aux morphismes coordonnées : $f(A) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$. On veut trouver A inversible telle que $f(A) = 0$.

- S'il existe $i \neq j$ tel que $\alpha_{i,j} \neq 0$, alors on peut poser $S = \sum_j \alpha_{j,j}$ puis $A = I_n - \frac{S}{\alpha_{i,j}} E_{i,j}$. A est triangulaire avec des 1 sur sa diagonale (car $i \neq j$), donc inversible. Par ailleurs, $f(A) = \sum_k \alpha_k - \frac{S}{\alpha_{i,j}} \alpha_{i,j} = 0$.
- Si pour tout $i \neq j$, on a $\alpha_{i,j} = 0$, alors f est la trace, et on cherche une matrice inversible de trace nulle. Il y en a plein, la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ à $(e_n, e_1, ..., e_{n-1})$ convient par exemple :

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&...&1\\1&0&0&...&0\end{pmatrix}$$

Ainsi, pour n'importe quel hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a bien construit dans tout les cas une matrice (explicite pour une forme linéaire donnée) qui est inversible.

Retour à Khôlle 109 : Groupe d'Heisenberg, Hyperplan de matrices.

2.110 Correction Khôlle 110 : Théorème de Hadamard, Inversion d'une matrice

Retour à Khôlle 110 : Théorème de Hadamard, Inversion d'une matrice.

Exercise 2.333 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.334 (Problème principal)**.** Supposons qu'il existe un vecteur $x = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$. Si on suppose x non nul, alors on peut prendre i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \ ; \ i \in [\![1,n]\!]\}$. Ensuite, on sait que $Ax = \vec{0}$, donc : $\forall i,\ \sum_k a_{i,k}x_k = 0$, puis en particulier $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{k\neq i_0} a_{i_0,k}x_k$. Il s'ensuit que :

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| = \left|-\sum_{k\neq i_0} a_{i_0,k}x_k\right| \leq \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|\,|x_k| \leq |x_{i_0}| \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|$$

Finallement, si $|x_{i_0}| \neq 0$, alors on peut diviser, et on obtient que $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|$. Ainsi, la supposions que la condition précédente est fausse pour tout i assure que tous les $|x_i|$ valent 0 : $x = \vec{0}$.

Cela revient à dire que si $\forall i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible.

Exercise 2.335 (Question subsidiaire)**.** On se rappelle de la formule classique $(i \leq j)$:

$$\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \frac{1}{i!(k-i)!}\frac{j!}{(j-k)!} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}$$

L'équivalence proposée revient à dire que les matrices $A = \left[\binom{j}{i}\right]_{i,j}$ et $B = \left[(-1)^{i+j}\binom{j}{i}\right]_{i,j}$ sont inverses l'une de l'autre (attention on a exprimé h_j en fonction de f_i, il faut intervertir les indices i et j pour retrouver les expressions normales). Or on a le terme général de AB :

$$(-1)^j \sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{k}{i}\binom{j}{k} = (-1)^j \sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i} \sum_{k=0}^{j-i} (-1)^k \binom{j-i}{k}$$

Si $i \neq j$, la dernière somme est le binome de Newton pour $(1-1)^{j-i} = 0$, si $i = j$, il y a un seul terme dans la somme qui vaut 1. En terminant le calcul, on trouve bien $AB = I_d$, ce qui conclut.

Retour à Khôlle 110 : Théorème de Hadamard, Inversion d'une matrice.

2.111 Correction Khôlle 111 : Transposition de solution, Matrices vampires

Retour à Khôlle 111 : Transposition de solution, Matrices vampires.

Exercise 2.336 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.337 (Problème principal)**.** Si $Ax = b$ a une solution, alors pour y tel que $y^T A = \vec{0}^T$, on a :

$$0 = \vec{0}^T x = y^T Ax = y^T b$$

Réciproquement, si $Ax = b$ n'a pas de solution, soit r le rang de A. On sait que b n'est pas dans l'image des colonnes de A, donc la matrice de taille

$n \times (m+1)$ définie par $(A|b)$ a rang $r+1$. De même, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \vec{0}^T & 1 \end{array}\right)$ a rang $r+1$. De fait, $\left(\vec{0}^T|1\right)$ est dans l'image des lignes de $(A|b)$. Soit y le vecteur des coefficients de cette dépendance linéaire. Alors : $y^T A = \vec{0}^T$ et $y^T b = 1 \neq 0$, ce qui est bien la réciproque recherchée.

Exercise 2.338 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

On s'amuse comme on peut...

(Pour ceux qui connaissent la théorie du polynôme caractéristique (vue en Spé), on est simplement en train de dire que $\chi(M) = X^2 - 11X + 0$, donc que $M^2 = 11M$. Or $11x = \overline{xx}$. On pourrait procéder de même avec des entrées de M à deux chiffres et $M^2 = 101M$.)

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Regardons la première entrée :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a+d) = 11a$$

De même :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = 11M$$

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = 11M$. On note $\Delta = ad - bc$ et $t = a + d$. On veut prouver que $\Delta = 0$ et que $\tau = 11$. Un rapide calcul donne que $bc = \Delta - ad$, puis :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tau - \Delta & b\tau \\ c\tau & d\tau - \Delta \end{pmatrix}$$

Finalement, identifier les coefficients donne $\Delta = 0$ et $\tau = 11$.

Si on veut trouver une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \overline{ef} & \overline{gh} \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{abab} & \overline{cdcd} \\ \overline{efef} & \overline{ghgh} \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que $\Delta = xt - zy = 0$ et que $\tau = x + t = 101$. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 66 & 55 \\ 42 & 35 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6666 & 5555 \\ 4242 & 3535 \end{pmatrix}$$

Exercise 2.339 (Question subsidiaire)**.** Soit $M \notin GL_n(\mathbb{K})$. Comme Ker M n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, construisons $\mathcal{B}_1$ une base de Ker M, puis S un supplémentaire de Ker (M) muni de sa base $\mathcal{B}_2 = (e_1, ..., e_r)$. On construit ainsi la base

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ Comme S est isomorphe à Im M par le théorème du rang, on peut construire $\mathcal{C}_2 = (f(e_1), ..., f(e_r))$ qui est une base de Im M. On complète cette base via le théorème de la base incomplète pour obtenir un base $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

On peut finalement écrire (par bloc) la matrice M dans la base de départ $\mathcal{B}$ et la base d'arrivée $\mathcal{C}$:

$$M \sim \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right)$$

Cette matrice étant triangulaire stricte, elle est bien nilpotente.

Retour à Khôlle 111 : Transposition de solution, Matrices vampires.

2.112 Correction Khôlle 112 : Lemme de Whitehead, Hyperplan de matrice

Retour à Khôlle 112 : Lemme de Whitehead, Hyperplan de matrice.

Exercise 2.340 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.341 (Problème principal)**.** Multiplier A à gauche par $e_{i,k}(\lambda)$ revient à ajouter à la i-ième ligne de A sa j-ième ligne multipliée par λ, donc $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\mu) + \lambda\,(\text{en ligne } i \text{ une ligne avec un seul 1 en colonne } j) = e_{i,j}(\lambda+\mu)$. En outre, $e_{i,j}(\lambda)e_{k,\ell}(\mu) = I_n + \mu E_{k,\ell} + \lambda E_{i,j}$ si $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En particulier, $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{k,\ell}(\mu)$ commutent si $i \neq \ell$ et $j \neq k$, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\mu)] = I_n$. Ensuite, si $j = k$ mais $i \neq \ell$, alors $e_{i,j}(\lambda)e_{j,\ell}(\mu) = I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] &= e_{i,j}(\lambda)e_{j,k}(\mu)e_{i,j}(-\lambda)e_{j,k}(-\mu) \\
&= (I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell})\,(I_n - \lambda E_{i,j} - \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}) \\
&= I_n + \lambda\mu E_{i,\ell} = e_{i,\ell}(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons enfin que $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{i,j}(\mu)$ commutent, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] = I_n$.

On sait que $[E_n, E_n] \subseteq E_n$ car un commutateur est un produit d'éléments du groupe donc est dans le groupe. De fait, $DG(E_n)$, le groupe engendré par $[E_n, E_n]$, est bien dans E_n. D'autre part, on a montré que tous les générateurs de E_n peuvent être écrits comme des commutateurs, donc $E_n \subseteq DG(E_n)$. Cela donne bien $DG(E_n) = E_n$ (cette relation fait de E_n un groupe parfait).

Un rapide calcul donne :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = e_{2,1}(a^{-1})e_{1,2}(1-a)e_{2,1}(-1)e_{1,2}(1-a^{-1})$$

Ensuite, soit $A = [a_{i,j}]_{i,j}$. Dès lors, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ s'écrit comme $\prod_{i,j} e_{i,n+j}(a_{i,j})$. On peut décortiquer cela en se rendant compte que, d'une part, toutes ces matrices de transvection commutent (par les relations de Steinberg), et d'autre part, multiplier $\left(\begin{array}{c|c} I_n & * \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ par $e_{i,n+j}(a_{i,j})$ à gauche ajoute le coefficient $a_{i,j}$ dans la cellule $(i, n+j)$.

Il s'ensuit que, si $B \in GL_n$, alors $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$ car on peut écrire les transvections par blocs $\tilde{e}_{1,2}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ et $\tilde{e}_{2,1}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline A & I_n \end{array}\right)$ et s'en servir dans le calcul :

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) = \tilde{e}_{2,1}(B^{-1})\tilde{e}_{1,2}(I_n - B)\tilde{e}_{2,1}(-I_n)\tilde{e}_{1,2}(I_n - B^{-1})$$

Enfin, si $A, B \in GL_n$, alors :

$$\left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} (BA)^{-1} & 0_n \\ \hline 0_n & BA \end{array}\right)$$

Donc avec le morphisme (évident) $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$, on a que $[GL_n, GL_n] \simeq \left\{\left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \ ; \ A, B \in GL_n\right\} \subseteq E_{2n}$. Ainsi, le groupe dérivé de GL_n (le groupe engendré par les $[GL_n, GL_n]$) est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

N.B. : Il existe un moyen de rendre les choses plus jolies. En considérant GL_∞, le groupe général linéaire, dont les éléments sont les matrices infinies inversibles qui ne diffèrent de la matrice identité (infinie) que par un nombre fini de leurs coefficients, et E_∞ son pendant pour les transvections, on a : $[GL_\infty, GL_\infty] = [E_\infty, E_\infty] = E_\infty$. Cette notion est liée à la **K**-théorie.

Exercise 2.342 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.332.

Retour à Khôlle 112 : Lemme de Whitehead, Hyperplan de matrice.

2.113 Correction Khôlle 113 : Hyperplan de matrice stable par multiplication

Retour à Khôlle 113 : Hyperplan de matrice stable par multiplication.

Exercise 2.343 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.344 (Problème principal)**.** On sait que $\dim \mathcal{M}_n^* = \dim \mathcal{M}_n = n^2$. En outre, $\varphi_{E_{i,j}}(M) = tr(E_{i,j}M) = m_{i,j}$ car $E_{i,j}M$ est la matrice dont la i-ième ligne est la j-ième ligne de M. On a donc bien toutes les formes linéaires coordonnées, qui forment une base de $\mathcal{M}_n^*$. On aurait aussi pu constater que si $tr(AM) = 0$ pour tout M, alors $tr(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$, donc $A = 0_n$, ce qui montre que Φ est injective car son noyau est nul.

Dès lors, comme tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire, et que toute forme linéaire peut être décrite comme φ_A pour une certaine matrice A, il existe bien $A \in \mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{H} = \text{Ker } \varphi_A$ (on notera d'ailleurs que A est unique pour $\mathcal{H}$ donné).

Soit $B \in \mathcal{H}$ et $C \in \mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{H} \oplus C\mathbb{K} = \mathcal{M}_n$. On a alors $\varphi_A(C) \neq 0$, disons $\frac{\varphi_A(CB)}{\varphi_A(C)} = \lambda$. Regardons la forme linéaire $\psi : M \mapsto \varphi_A(MB) - \lambda\varphi_A(M)$. Si $M \in \mathcal{H}$, alors $MB \in \mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est stable par produit, donc $\varphi_A(MB) = 0$, en outre $\varphi_A(M) = 0$, donc $\psi(M) = 0$. De plus, $\psi(C) = 0$ par construction de λ. Donc ψ est la forme nulle : $\forall M,\ \lambda\varphi_A(M) = tr(\lambda AM) = tr(AMB) = tr(BAM)$. Or Φ est injective, donc $\lambda A = BA$.

Si Im $A = \{\vec{0}\}$, alors $A = 0_n$, donc φ_A est la forme nulle, ce qui n'est pas le cas car Ker φ_A est un hyperplan. Donc les constructions de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont valides. Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, la matrice $B' = P^{-1}BP$ est la matrice de B dans la base $\mathcal{C}$. Soit y_1 le premier vecteur de $\mathcal{C}$, qui dans l'image de A par construction, disons $y_1 = Ax_1$. Alors, comme $BA = \lambda A$, on a $By_1 = BAx_1 = \lambda Ax_1 = \lambda y_1$. Cela signifie que le premier vecteur de la base $\mathcal{C}$ est envoyé par B sur un multiple de lui-même : la première colonne de $P^{-1}BP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. En particulier, on vient de montrer que l'image de $\mathcal{H}$ par l'application linéaire $M \mapsto P^{-1}MP$ a une dimension au plus de $n^2 - (n-1)$.

Or cette application est un isomorphisme. En effet, elle est linéaire et son inverse est $N \mapsto PNP^{-1}$. Il s'ensuit que l'image de $\mathcal{H}$ par $M \mapsto P^{-1}MP$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n$ et a de fait dimension $n^2 - 1$. D'où : $n^2 - (n-1) \geq n^2 - 1$ puis $n = 2$ (pour $n = 1$, il n'y a pas d'hyperplan non nul). $\mathcal{H}$ est alors de dimension $2^2 - 1 = 3$ et l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ envoie $\mathcal{H}$ dans T_2 qui est lui-même de dimension 3 : $\mathcal{H} \simeq T_2$.

Exercise 2.345 (Question subsidiaire)**.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $A_\lambda = A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$. On effectue ensuite un pivot de Gauss (sans se préoccuper de l'inverse) :

$$A_\lambda \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Les racines évidentes de $3 - X^2 - 2X$ étant 1 et -3 et $-X + 1$ s'annulant pour 1, on en déduit que A_λ n'est pas inversible pour $\lambda \in \{1, -3\}$.

<u>Pour $\lambda = -3$:</u>, on a $A_{-3} = A + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On remarque

que $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de A_{-3}, et que la matrice est de rang 3 car on a montré au dessus qu'elle est équivalente à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(1,4,4,0)$. Donc $AX=-3X \iff X\in \mathrm{Vect}((-1,1,1,1)^T)$.

Pour $\lambda = 1$:, on a $A_1 = A - I_4 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. On remarque que $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A_1 et sont libre. En outre, A_1 est de rang au moins 1 car elle a une colonne non nulle. Donc $AX=X \iff X\in \mathrm{Vect}((1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(1,0,0,1)^T)$.

Ainsi, en posant $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, on a $AP=PD$ où $D=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$, ce qui donne bien le $A=PDP^{-1}$ souhaité. On retrouvera ce genre de calculs (et plus encore) dans le chapitre de diagonalisation de Spé.

Retour à Khôlle 113 : Hyperplan de matrice stable par multiplication.

2.114 Correction Khôlle 114 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire

Retour à Khôlle 114 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire.

Exercise 2.346 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.347 (Problème principal)**.** Premièrement, pour $B\in G$, comme B est inversible, $i(B)$ est correctement définie et est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$ car c'est une application linéaire et si $i(B)(M)=N$, alors $M=BNB^{-1}$ puis $N=B^{-1}MB$, donc $\mathrm{Im}\ i(B)=\mathcal{M}_n$. Ensuite, si $A,B\in G$, alors $i(AB)(M)=(AB)M(AB)^{-1}=A(BMB^{-1})A^{-1}=i(A)\circ i(B)(M)$ et $i(B^{-1})(M)=B^{-1}MB=i(B)^{-1}(M)$ par le raisonnement précédent. De fait, i est un morphisme de groupe de $G\to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)$.

Attention à ne pas confondre l'injectivité de i avec l'injectivité de $i(B)$: celle de i revient à $\mathrm{Ker}\ i=\{I_n\}$ car I_n est l'élément neutre du groupe G (le noyau est ici le noyau d'un morphisme de groupe). Cependant, si $\lambda I_n\in G$ pour $\lambda\neq 0$, alors $i(\lambda I_n)(M)=\lambda I_n M\frac{1}{\lambda}I_n=M$, donc $i(\lambda I_n)=id_{\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)}$. Ainsi, s'il existe $\lambda\notin\{0,1\}$, $\lambda I_n\in G$, alors i n'est pas injective.

Réciproquement, si $i(B)=id_{\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)}$, alors B commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n$ car $i(B)(M)=M$ revient à $BM=MB$. Donc B est une homothétie. Si la seule homothétie de G est l'identité, alors i est bien injective car sont noyau (de morphisme de groupe) est réduit à $\{I_n\}$.

Si $M\in\mathcal{M}_n^G$, alors, soit $x\in \mathrm{Ker}\ M$, on a $Mx=\vec{0}$, et on voudrait savoir si, pour $B \in G$, $M(Bx) = \vec{0}$. On sait que $B^{-1}MBx = Mx = \vec{0}$, or B^{-1} est injective, donc MBx est l'unique antécédant de $\vec{0}$: $MBx = \vec{0}$. Ainsi, Ker M est bien stable par G.

De la même manière, si $y \in \text{Im } M$, On veut savoir si $By \in \text{Im } M$ pour $B \in G$. Soit $x \in E$ tel que $Mx = y$. Dès lors : $B^{-1}MBx = Mx = y$ puis $M(Bx) = By$, donc $By \in \text{Im } M$. Im M est bien stable par G.

Maintenant, si E est irréductible pour G, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sous-espace de E non trivial et stable par G, alors si $M \in \mathcal{M}_n^G$, alors Ker M et Im M sont des sous-espaces triviaux de E : M est nulle (Ker $M = E$) ou inversible (Ker $M = \{\vec{0}\}$). Dès lors : $\mathcal{M}_n^G \subseteq \{0_n\} \cup GL_n$.

Cependant, $\mathcal{M}_n^G$ est aussi un espace vectoriel (en tant qu'intersection des Ker $(Id - i(B))$ pour $b \in G$), et $I_n \in \mathcal{M}_n^G$ par un calcul évident. Donc $\dim \mathcal{M}_n^G$. Si on suppose que $\dim \mathcal{M}_n^G \geq 2$, alors $(M, N) \in \mathcal{M}_n^G$ une famille libre. Dans ce cas, la méthode du pivot de Gauss permet de triangulariser $N + \mu N$ pour $\mu \in \mathbb{K}$, et le choix d'un bon μ permet d'annuler l'un des coefficients diagonaux. Cela signifie que GL_n ne content pas de plan afin (un meilleur argument sera donné en Spé), donc la dimension de $\mathcal{M}_n^G$ ne peut pas être 2 ni plus : $\dim \mathcal{M}_n^G = 1$.

Exercise 2.348 (Question subsidiaire)**.** On a envie de dire que les matrices de GL_n qui commutent avec toutes les matrices de GL_n sont les homothétie, de la même manière que les matrices de $\mathcal{M}_n$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n$ sont les homothétie, mais attention, ça n'est pas évident, car pour montrer la propriété pour $\mathcal{M}_n$, on utilise les $E_{i,j}$, qui ne sont pas dans GL_n.

Il reste cependant clair que les homothéties sont dans GL_n et commutent avec toutes les matrices de GL_n. Étudions la réciproque. Soit $A \in GL_n$ qui commute avec toutes les matrices de GL_n. En particulier, A commute avec les matrices de transvections $T_{i,j} = I_n + E_{i,j}$ pour $i \neq j$ car $T_{i,j} \in GL_n$, donc $AT_{i,j} = T_{i,j}A$. Or : $T_{i,j}A = A$+une matrice avec sur la i-ième ligne la j-ième ligne de A ; et $AT_{i,j} = A$+une matrice avec sur la j-ième colonne la i-ième colonne de A. On en déduis que $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$: A est diagonale. Reste à montrer que les $a_{i,i}$ ont tous la même valeur. Or, $AT_{1,i} = T_{1,i}A$, donc, en regardant le coefficient en $1, i$: $a_{1,1} = a_{i,i}$: A est une homothétie (non nulle car $A \in GL_n$).

Retour à Khôlle 114 : Lemme de Schur, Centre du groupe linéaire.

2.115 Correction Khôlle 115 : Théorème de Singmaster, Problème de Josephus

Retour à Khôlle 115 : Théorème de Singmaster, Problème de Josephus.

Exercise 2.349 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.350 (Problème principal)**.** Remarquons d'abord que $N(k) < \infty$. En effet, si $n > k$, alors $\binom{n}{r} > k$ pour $r \notin \{0, n\}$, et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \neq k$. Donc si $\binom{n}{r} = k$, alors $n < k$, d'où $N(k) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ (c'est le nombre de coefficients binomiaux ne valant pas 1 dans les n premières lignes du triangle de Pascal).

Ensuite, regardons, pour a fixé, l'application $b \mapsto \binom{a+b}{a}$. Elle est strictement croissante, donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution (peut-être 0) quand a est fixé et b varie. De la même manière, pour b fixé, l'application $a \mapsto \binom{a+b}{a}$ est strictement croissante. Donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution quand b est fixé et a varie. Supposons maintenant que $k \leq \binom{2s}{s}$, alors si $\binom{a+b}{a} = k$, on a $a \leq s$ et $b \leq s$. Donc $N(k) \leq 2s$ (chaque choix de a donne au plus 1 solution, chaque choix de b aussi et il y a s choix possibles pour a et s choix possibles pour b). Reste à estimer s en fonction de k. Un constat (algébrique ou combinatoire) rapide donne que $2^m \leq \binom{2m}{m}$. Donc si s est le plus petit entier tel que $k \leq \binom{2s}{s}$, alors en particulier $\binom{2(s-1)}{s-1} \leq k$, donc $2^{s-1} \leq k$ puis $s \leq 1 + \log_2 k$. Ainsi : $N(k) \leq 2s \leq 2 + 2\log_2 k = O(\log k)$.

Des estimations plus précises sont connues, la meilleure (en février 2021) étant $N(k) = O\left(\frac{\log\log\log k}{(\log\log k)^3} \log k\right)$, mais il est conjecturé que $N(k) = O(1)$ (c'est-à-dire que $N(k)$ est borné) et la plus grande valeur de $N(k)$ qu'on ait trouvé est $N(3003) = 8$ (testé jusqu'à 2^{48}).

Exercise 2.351 (Question subsidiaire)**.** Cette vidéo explique tout !

Retour à Khôlle 115 : Théorème de Singmaster, Problème de Josephus.

2.116 Correction Khôlle 116 : Plateaux d'échecs, Super-triangles de Héron

Retour à Khôlle 116 : Plateaux d'échecs, Super-triangles de Héron.

Exercise 2.352 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.353 (Problème principal)**.** Cet exercice se complique au fur et à mesure qu'on précise le sens de "plateau". Dans

Un première question "simple" serait de dire que toutes les pièces d'échec sont différenciées : les pions blancs s'appellent "pion1", "pion2",..., "pion8", de même pour les tours, les cavaliers, les fous, et les pièces noires. Un plateau est alors une disposition des pièces d'échecs sur l'échiquier. Il y a 32 pièces différentes, et 64 cases. Si toutes les pièces sont présentes, un plateau revient à choisir 32 cases parmi 64 (qu'on ordonne par l'ordre alpha-numérique de a1 à h8), puis une permutation des 32 pièces (pour choisir quelle pièce va sur quelle case). Il y a donc $\binom{64}{32} \times 32! = \frac{64!}{32!} \approx 4.8 \times 10^{53}$ plateaux d'échecs avec 32 pièces différenciées.

Un plateau peu aussi contenir moins de pièces (au moins les 2 rois légalement, mais **ici** la légalité des plateaux ne nous importe pas), disons k entre 0 et 32. Dès lors, un plateau revient à choisir k cases parmi 64, puis k pièces parmi

32 et enfin une permutation de ces k pièces : il y a $\binom{64}{k}\binom{32}{k}k! = \frac{64!32!}{(64-k)!(32-k)!k!}$ plateaux à k pièces différenciées. Donc il y a N plateaux d'échecs avec des pièces différenciées :

$$N = \sum_{k=0}^{32} \frac{64! \times 32!}{(64-k)!(32-k)!k!} = 64! \times 32! \sum_{k=0}^{32} \frac{1}{(32+k)!(32-k)!k!} \approx 1.2 \times 10^{54}$$

Même s'il semble qu'il y a finalement "peu" de plateaux avec n'importe quel nombre de pièces par rapport au nombre de plateaux à 32 pièces, ce résultat est juste et on peut s'en persuader en considérant qu'il y a "seulement" 2.1×10^{49} plateaux à 25 pièces, ce qui est largement négligeable.

Maintenant, on peut essayer de compter les plateaux dans lesquels les pièces ne sont pas différenciées : échanger les deux tours blanches de place ne change pas le plateau. Imaginons que quelqu'un rentre dans la pièce et trouve un plateau d'échecs avec les pièces placées dessus, il ne saurait pas dire "cette tour est la tour blanche *de gauche* et celle-ci, la tour blanche *de droite*", il dira simplement que ce sont les deux tours blanches.

Dans ce cadre, commençons par compter les plateaux à 32 pièces. On appellera *plateau différencié* un plateau dans lequel on considère que les pièces sont différenciées, et *plateau non-différencié* sinon. Fixons un des $\binom{64}{32}32!$ plateaux différenciés précédents. En échangeant les deux tours blanches, on obtient un autre plateau différencié, mais le même plateau non-différencié. De même, on pourrait échanger les pions blancs entre eux, les cavaliers, les fous, ou l'équivalent en noir. Dès lors, combien de plateau différenciés donnent le même plateau non-différencié ? Pour 1 plateau non-différencié, on a 2! possibilités pour les tours blanches, 2! pour les cavalier, 2! pour les fous, 8! pour les pions, et pareil pour les noirs : $(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2$ plateaux différenciés donnent le même plateau non-différencié. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciés à 32 pièces est :

$$\frac{64!}{32!} \times \frac{1}{(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2} \approx 4.6 \times 10^{42}$$

En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des plateaux différenciés et $\hat{\mathcal{P}}$ les non-différenciés, on vient d'expliquer qu'il y a une bijection :

$$\mathcal{P} \simeq \hat{\mathcal{P}} \times \left(\mathcal{S}_2^3 \times \mathcal{S}_8\right)^2$$

Reste à compter les plateaux non-différenciés à k pièces. Le problème est qu'on ignore quelles sont les pièces choisies : on ne peut pas dire "il y a 2 tours blanches donc on divise par 2!" car on ignore s'il y a belle et bien les 2 tours blanches parmi les k pièces choisies. Prenons le problème dans l'autre sens : plutôt que de raisonner à k fixé, regardons combien de plateaux (non-différenciés) peut-on construire avec n_{tb} tours blanches, n_{cb} cavaliers blanc, n_{fb} fous blancs, etc ? Notons $\vec{n} = (n_{tb}, n_{cb}, n_{fb}, n_{db}, n_{rb}, n_{pb}, n_{tn}, n_{cn}, n_{fn}, n_{dn}, n_{rn}, n_{pn})$ avec b pour "blanc", n pour "noir", et t, c, f, d, r, p pour "tour", "cavalier", "fou", "dame", "roi", "pion". Dès lors, pour $\vec{n}$ fixé, on peut noter $S(\vec{n})$ la somme de ses coordonnées et $P(\vec{n})$ le produit des factorielles de ses coordonnées. Le nombre de plateau non-différenciés pour $\vec{n}$ est alors $\binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})!}{P(\vec{n})}$. Enfin, regardons l'ensemble des valeurs possibles pour $\vec{n}$: il s'agit de $X = \left([\![0,2]\!]^3 \times [\![0,1]\!]^2 \times [\![0,8]\!]\right)^2$. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciée est :

$$\sum_{\vec{n}\in X} \binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})!}{P(\vec{n})}$$

Ce nombre est bien plus facile à calculer qu'il n'y paraît (avec un ordinateur cela dit) : il y a 944 784 termes. Beaucoup sont identiques, mais laissons cela de côté. Avec un programme Python, on obtient rapidement (1 minute ou 2 quand même, mais je n'ai pas programmé cela très intelligemment) qu'il y a environ 4.6×10^{46} plateaux non-différenciés.

Exercise 2.354 (Question subsidiaire)**.** L'identité de Héron se déduit d'une utilisation systématique du théorème de Pythagore sur les 3 hauteurs d'un triangle quelconque.

Soit un super-triangle de Héron de côtés a, b, c. Notons $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. L'égalité aire-périmètre donne :

$$(2s)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Changeons de variables et posons $x = s-a$, $y = s-b$ et $z = s-c$. Alors $x+y+z = s$, donc l'équation précédent donne :

$$4(x+y+z)^2 = xyz$$

Supposons, sans perte de généralité que $0 \leq x \leq y \leq z$. Si $x = 1$, alors $4+4y+4z = yz$, soit $4(y+1) = (y-4)z$, donc $y \geq 5$ (sinon le membre droit est négatif ou nul). En outre, il faut que $y-4|4(y+1)$. Or $(y-4)\wedge(y+1) = (y-4)\wedge 5$, donc $y-4$ doit diviser $4 \times 5 = 20$ pour que $y-4|4(y+1)$. La liste exhaustive donne $y \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24\}$. Seuls $(y, z) \in \{(5, 24), (6, 14), (8, 9)\}$ permettent d'assurer $y \leq z$ et $4+4y+4z = yz$. On obtient ainsi 3 super-triangles de Héron :

x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
1	5	24	29	25	6	60	60
1	6	14	20	15	7	42	42
1	8	9	17	10	9	36	36

Ensuite, on poursuit avec $x = 2$. Alors $4(y+2) = (2y-4)z$, donc $2y-4|4(y+2)$, or $(2y-4)\wedge(y+2) = (2y-4)\wedge 6$, puis $2y-4|24$, soit $y \in \{3, 4, 5, 6, 7, 14\}$ puis $(y, z) \in \{(3, 10), (4, 6)\}$. Soit :

x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
2	3	10	13	10	5	30	30
2	4	6	10	8	6	24	24

Après, pour $x = 3$, on a $4(y+3) = (3y-4)z$. Or $(y+3)\wedge(3y-4) = (3y-4)\wedge 10$, donc $3y-4|40$, soit $3y \in \{5, 6, 8, 9, 14, 24, 44\}$ puis $(y, z) \in \{(2, 10)\}$ mais $x \leq y$. Ce cas ne mène à aucune nouvelle solution.

Enfin, si $x \geq 4$, alors $4(x+y+z) \leq 4(z+z+z) = 12z$, mais $xyz \geq 4\times 4\times z = 16z$, ce qui est impossible.

Finalement, il n'y a que 5 super-triangles de Héron.

Remarquons que, en anglais, ils s'appellent *super-Hero triangles*. Pour plus d'informations culturelles passionnantes, regardez ici.

Retour à Khôlle 116 : Plateaux d'échecs, Super-triangles de Héron.

2.117 Correction Khôlle 117 : Nombre en base donnée, Problème de Catalan

Retour à Khôlle 117 : Nombre en base donnée, Problème de Catalan.

Exercise 2.355 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.356 (Problème principal)**.** Fixons $\mathcal{B}$. Comme on manipule des nombres positif, on constate que toute augmentation de l'un des a_i entraîne une augmentation du nombre $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$. Plus précisément, soit $<$ la relation d'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$ et $\varphi : \prod_i [\![1, b_i]\!] \to \mathbb{N}$ la fonction $\varphi : (a_1, a_2, .., a_n) \mapsto \overline{a_1 a_2 ... a_n}$. Montrons que cette fonction est strictement croissante.

Soient $(a_1, a_2, .., a_n)$ et $(a'_1, a'_2, .., a'_n)$ tel que $(a_1, a_2, .., a_n) < (a'_1, a'_2, .., a'_n)$. Soit k le plus petit entier tel que $a_k < a'_k$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi((a_1, a_2, .., a_n)) &= \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left((b_i - 1) \prod_{i<j} b_j\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n}\left(\left(\prod_{i\leq j} b_j\right) - \left(\prod_{i<j} b_j\right)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \prod_{k<j} b_j - 1 \\
&< \sum_{i=1}^{k-1}\left(a_i \prod_{i<j} b_j\right) + (a_k + 1) \prod_{k<j} b_j \\
&< \sum_{i=1}^{k-1}\left(a'_i \prod_{i<j} b_j\right) + a'_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n-1}\left(a'_i \prod_{i<j} b_j\right) \\
&< \varphi((a'_1, a'_2, .., a'_n))
\end{aligned}$$

Dès lors, comme φ est strictement croissante, elle est injective. On peut regarder ses bornes : $\varphi((0,0,...,0)) = 0$ et

$$\varphi((b_1-1,...,b_n-1)) = \sum_{i=1}^{n}\left((b_i-1)\prod_{i<j} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i\leq j} b_j - \prod_{i<j} b_j\right) = \prod_i b_i - 1$$

On a donc une fonction injective de $\prod_i [\![0, b_i-1]\!]$ vers $[\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$. Comme on a égalité des cardinaux des deux ensembles, φ est une bijection.

Ainsi, on peut utiliser un algorithme semblable à la décomposition binaire pour associer à un nombre entre 0 et $\prod_i b_i - 1$ un élément de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$. Prenons $n \in [\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$ puis calculons :

1. $a_1 = n \mod b_1$
2. $n_1 = \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor$
3. $a_2 = n_1 \mod b_2$
4. $n_2 = \lfloor \frac{n_1}{b_2} \rfloor$
5. ...

Un tel algorithme permet de construire en temps $O(\prod_i b_i)$ (soit le temps optimal) les éléments d'un produit cardinal. L'avantage est que l'occupation mémoire demandée est minimale (un seul entier) : on construit l'élément pour $n = 0$, on fait le traitement souhaité ; puis on construit pour $n = 1$, on fait le traitement ; puis pour $n = 2$, etc. À chaque étape, on n'a besoin de retenir que n (en plus de la mémoire occupée par le traitement).

Exercise 2.357 (Question subsidiaire)**.** Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}$ écrit sous forme d'une fraction irréductible. Alors, en utilisant que α est racine du polynôme et en multipliant par q^2, on obtient : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. De fait, $ap^2 = q(bp+cq)$, donc $q|ap^2$. Comme $q \wedge p = 1$, on a : $q|a$. De fait, q est impair. De la même manière, $p|c$, donc p est impair. Cependant, on remarque que $ap^2 = -bpq - cq^2$, on a à gauche un nombre impair et à droite la somme de deux nombres impair, c'est-à-dire un nombre pair. C'est un problème ! Finalement, il est impossible que α soit rationnel.

Dans un polynôme quelconque, une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ vérifie : q divise le coefficient dominant et p divise le coefficient constant. Cela donne énormément d'informations : la résolution des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients rationnels se ramène à un nombre fini de cas.

Exercise 2.358 (Question subsidiaire)**.** Écrivons plutôt l'équation de la forme $x^2 - 1 = y^3$, c'est-à-dire $(x-1)(x+1) = y^3$. Dès lors, si $p|y$ avec p premier et $p \neq 2$, comme $(x+1) \wedge (x-1) = 2$, on a $p|(x-1)$ ou $p|(x+1)$ mais pas les deux. Mais comme $p^3|y^3 = (x+1)(x-1)$, si $p|(x-1)$, alors $p^3|(x-1)$ (et respectivement pour $x+1$). Dès lors, il y a 3 possibilités :

- $x+1$ et $x-1$ sont des cubes impairs.

- $x+1=2a^3$ et $x-1=4b^3$ avec a et b impairs.
- $x+1=4a^3$ et $x-1=2b^3$ avec a et b impairs.

Comme y est impair, x est pair (sinon x^2-1 est pair), donc seul le premier cas est possible. Or dans le premier cas, on a deux cubes qui diffèrent de 2, ce qui n'est pas possible : il n'y a pas de cube impair qui suive immédiatement un carré.

On peut se poser la question en toute généralité, c'est un peu plus difficile mais on obtient que la seule possibilité est $3^2=2^3+1$.

Retour à Khôlle 117 : Nombre en base donnée, Problème de Catalan.

2.118 Correction Khôlle 118 : Lemme de Riemann-Lebesgue, Norme $\mathcal{L}^\infty$

Retour à Khôlle 118 : Lemme de Riemann-Lebesgue, Norme $\mathcal{L}^\infty$.

Exercise 2.359 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.360 (Problème principal)**.** Soit $a_1<...<a_p$ une subdivision adaptée à f et y_i les valeurs prises par f sur $]a_i,a_{i+1}[$. On a :

$$u_n=\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\sum_i y_i\int_{a_i}^{a_{i+1}}\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_i y_i\left(\cos(na_{i+1}-\cos(na_i)\right)$$

Soit M la plus grande valeur des y_i (qui sont en nombre fini par définition. Alors :

$$|u_n|\leq\frac{1}{n}\sum_i M\times 2=\frac{2Mp}{n}$$

Où p est la taille de la subdivision (pour rappel).

Ainsi, quand $n\to+\infty$, on a bien $u_n\to 0$.

Si f est continue par morceaux, alors soit $\varepsilon>0$ et φ une fonction en escalier proche de f à ε près : $\forall x\in[a,b],\ |f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

Dès lors, $u_n=\int_a^b\varphi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x+\int_a^b(f(x)-\varphi(x))\sin(nx)\mathrm{d}x$. Pour n assez grand, le premier terme est majoré (en valeur absolue) par ε car on sait qu'il tend vers 0 vu que φ est en escalier. Le second terme, quant à lui, est majoré par :

$$\left|\int_a^b(f(x)-\varphi(x))\sin(nx)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,|\sin(nx)|\mathrm{d}x\leq(b-a)\varepsilon\times 1$$

Finalement, on a bien que, pour tout $\varepsilon>0$, $|u_n|\leq(b-a+1)\varepsilon$: la suite tend vers 0.

__**N.B. :**__ Ce lemme assure que les coefficients d'une transformée de Fourier (ici, discrète, mais cela fonctionne aussi en continue) tendent vers 0.

Exercise 2.361 (Question subsidiaire)**.** Notons $M = \sup f$ et $u_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$.

Comme $\forall x,\ 0 \leq f(x) \leq M$, on a $\int_a^b f^n \leq \int_a^b M^n = (b-a)M^n$. Donc $u_n \leq M(b-a)^{1/n}$.

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$ et c tel que $f(c) = M$ (qui existe parce que f est une fonction continue sur un segment). Soit alors I, un intervalle autour de c sur lequel $\forall x \in I,\ f(x) \geq M - \varepsilon$. Notons η la longueur de I. Alors $u_n \geq \eta^{1/n}(M-\varepsilon)$. Or $\eta^{\frac{1}{n}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc pour n assez grand, $\eta^{1/n} \geq 1 - \varepsilon$, d'où, à partir d'un certain rang :

$$u_n \geq (1-\varepsilon)(M-\varepsilon) \geq M - (M+1)\varepsilon$$

De la même manière, quand $n \to +\infty$, $(b-a)^{1/n} \to 0$, donc, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq M + \varepsilon$.

Il s'ensuit que, à partir d'un certain rang :

$$M - (M+1)\varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon$$

Cela montre que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a déjà étudié la limite de v_n pour $g = 1$. Si maintenant g est continue strictement positive sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes, ainsi $m_g = \min g > 0$ et $M_g = \max g > 0$. Notons $M_f = \max f$ pour clarifier. Dès lors, on a :

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq M_g^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

et

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq m_g^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

Donc $v_n \to M_f$ quand $n \to +\infty$, quel que soit g.

N.B. : La première partie de cet exercice conduit à un résultat important. On peut considérer l'ensemble des fonctions telles que $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est finie (f n'étant pas nécessairement continue sur $[a, b]$, mais par exemple seulement continue sur $]a, b[$). Cet ensemble forme un espace vectoriel (ce n'est pas évident), *l'espace* $\mathcal{L}^p$, qu'on peut munir d'une notion de distance, la *norme* $\mathcal{L}^p$ définie par $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$. L'égalité ci-dessus montre que l'espace $\mathcal{L}^\infty$ s'interprète comme l'espace des fonctions bornées.

Retour à Khôlle 118 : Lemme de Riemann-Lebesgue, Norme $\mathcal{L}^\infty$.

2.119 Correction Khôlle 119 : Inégalité de Minkowski

Retour à Khôlle 119 : Inégalité de Minkowski.

Exercise 2.362 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.363 (Problème principal)**.** On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)^2 &= \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\int_a^b fg \\
&\leq \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

Le cas d'égalité équivaut à $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Cela revient à avoir le cas d'égalité de Cauchy-Scharwz $\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ et $\int_a^b fg \geq 0$. Cela revient finalement à $f = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ g = \lambda f$.

<u>**N.B. :**</u> Cette inégalité se généralise via l'inégalité de Jensen (qu'on verra en Spé) pour donner pour $p \in [1, +\infty[$: $\left(\int_a^b (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p}$. Cela signifie que l'ensemble des fonctions f telles que $\left(\int_a^b |f[^p\right)^{1/p} < +\infty$ est un espace vectoriel. Ces espaces sont un cadre de travail très important pour les espaces de Banach et plein de théorèmes d'analyse fonctionnelle plus poussés.

Exercise 2.364 (Question subsidiaire)**.** Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes, disons $m_f = \min f$ et $M_f = \max f$. Dès lors : $m_f g \leq fg \leq M_f g$. En intégrant, on a donc : $m_f \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M_f \int_a^b g$. Cela induit qu'il existe $k \in [m_f, M_f]$ tel que $\int_a^b fg = k\int_a^b g$.

f étant continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$ car $k \in [m_f, M_f] = f([a, b])$. On a bien montré qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Cette question est plus subtile qu'il n'y parait.

Si f est constante, alors le résultat est évident.

Supposons f non constante. On a déjà montré que $k = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ est dans $[m_f, M_f]$. Supposons que $k = m_f$. Alors on peut regarder $x \mapsto f(x)g(x) - m_f g(x)$ qui est continue et positive. Mais l'intégrale de cette fonction est nulle si $k = m_f$, donc la fonction est nulle elle-même, ce qui induit que $\forall x,\ f(x) = m_f$ (sinon, $\int_a^b fg > m_f \int_a^b g$) : cela contredirait l'hypothèse selon laquelle f n'est pas constante.

De même, $k = M_f$ induit f constante.

Ainsi, on peut supposer que $k \in]m_f, M_f[$. Comme f est continue, elle atteint ses bornes, disons $f(x_m) = m_f$ et $f(x_M) = M_f$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $[x_m, x_M]$, on sait qu'il existe $c \in [x_m, x_M]$ tel que $f(c) = k$, mais $c \neq x_m$ et $c \neq x_M$ car on sait que $f(x_m) =\neq k$ et $f(x_M) \neq k$. Ainsi, comme $[x_m, x_M] \subseteq [a,b]$, on a bien exhibé $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Retour à Khôlle 119 : Inégalité de Minkowski.

2.120 Correction Khôlle 120 : Limite ésotérique, Somme de Riemann pondérée

Retour à Khôlle 120 : Limite ésotérique, Somme de Riemann pondérée.

Exercise 2.365 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.366 (Problème principal)**.** Il y a plusieurs manières de faire, l'une d'entre elles avec Césaro.

Une autre solution passe par les sommes de Riemann :

$$\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \longrightarrow \int_0^1 \ln x \ \mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1$$

Finalement, quand $n \to +\infty$, $\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \to {}^1\!/e$.

Exercise 2.367 (Question subsidiaire)**.** Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ x \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| \leq \varepsilon$.

Posons N tel que $\forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \leq \eta$. Dès lors, $\forall n \geq N, k \in [\![0,n]\!],\ \frac{1}{n+pk} \leq \eta$. D'où :

$$\forall n \geq N, k \in [\![0,n]\!],\ \left|f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \frac{1}{n+kp}f'(0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{n+kp}$$

On peut maintenant sommer :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp}\right)f'(0)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \frac{1}{n+kp}f'(0)\right| \\ &\leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+kp}\end{aligned}$$

Or, on peut évaluer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}$ via une somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}p} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+xp} = \frac{\ln(1+p)}{p} \leq 1$$

À partir d'un certain rang N', on a donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} \leq 1$. Ce qui conduit à :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0) \right| \leq \varepsilon$$

Finalement les deux termes ont la même limite, et on connnaît la limtie du terme de droite ($f'(0)$ est indépendant de n) :

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) \to \frac{\ln(1+p)}{p} f'(0)$$

Retour à Khôlle 120 : Limite ésotérique, Somme de Riemann pondérée.

2.121 Correction Khôlle 121 : Tchebychev pour les sommes

Retour à Khôlle 121 : Tchebychev pour les sommes.

Exercise 2.368 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.369 (Problème principal)**.** Regardons ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne sur $x \mapsto af(x) + bx$ et $x \mapsto 1$ pour des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 (af(x) + bx)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leq \int_0^1 (af(x) + bx)^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq a^2 \int_0^1 f^2 + 2ab \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t + b^2 \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \\
&\leq a^2 \int_0^1 f^2 + 2abB + \frac{b^2}{3}
\end{aligned}$$

En outre :

$$\int_0^1 (af(x) + bx)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 f + b \int_0^1 x\mathrm{d}x = aA + \frac{b}{2}$$

Ainsi :

$$\left(aA + \frac{b}{2}\right)^2 \leq a^2 \int_0^1 f^2 + 2abB + \frac{b^2}{3}$$

On en déduis que pour tout $a \neq 0$ et b :

$$\int_0^1 f^2 \geq A^2 + (A - 2B)\frac{b}{a} - \frac{b^2}{12a^2}$$

On peut maintenant chercher à optimiser. Supposons $a \neq 0$ fixé. On a alors un polynôme du second degré en b. Le maximum est atteint pour $b = \frac{-(A-2B)/a}{2\times -1/12a^2} = 6a(A-2B)$. La valeur atteinte est alors :

$$A^2+(A-2B)\frac{6a(A-2B)}{a}-\frac{36a^2(A-2B)^2}{12a^2} = A^2+3(A-2B)^2 = 4A^2-12AB+12B^2$$

Par exemple, pour $A = B = 1$, on trouve que si $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 1$, alors $\int_0^1 f^2 \geq 4$.

Ensuite, cette inégalité est bien optimale. En effet, le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz revient à $x \mapsto af(x) + bx$ constante, c'est-à-dire f affine. Pour $f : x \mapsto 1$, on a $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = B$, puis : $4A^2 - 12AB + 12B^2 = 1 = \int_0^1 f^2$. Cette égalité prouve bien que l'inégalité obtenue est optimale.

Exercise 2.370 (Question subsidiaire)**.** Comme x_i et y_j sont croissantes, on a : $\forall i \neq j,\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$. En sommant d'abord sur i à j fixé, on trouve :

$$\sum_i x_i y_i - x_j \sum_i y_i - y_j \sum_i x_i + n x_j y_j \geq 0$$

Ensuite en sommant sur j :

$$n\sum_i x_i y_i - \sum_j x_i \sum_i y_i - \sum_j y_j \sum_i x_i + n\sum_j x_j y_j \geq 0$$

En passant les deux termes centraux à droite de l'inégalité et en divisant par $2n^2$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Maintenant, considérons deux fonctions f et g continues et croissantes sur $[0,1]$. Alors, soit n fixé et $x_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ et $x_j = g\left(\frac{j}{n}\right)$. On sait que x_i et y_j sont croissantes. Donc l'inégalité précédente donne :

$$\frac{1}{n}\sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_i f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient des sommes de Riemann et :

$$\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$$

Quitte à remplacer f par $-f$ et g par $-g$ le cas échéant, on en déduis que si f et g sont monotones de même monotonie, alors $\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$ et si elles sont monotones de monotonies différentes, alors $\int_0^1 fg \leq \int_0^1 f \int_0^1 g$.

Retour à Khôlle 121 : Tchebychev pour les sommes.

2.122 Correction Khôlle 122 : Irrationalité de π, Équivalent de $\ln(n!)$

Retour à Khôlle 122 : Irrationalité de π, Équivalent de $\ln(n!)$.

Exercise 2.371 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.372 (Problème principal)**.** Majorons $|P_n|$ sur $[0,\pi]$.

Sur $[0,\pi]$, on a $|X^n| \leq \pi^n$ et $|(bX-a)^n| \leq \max(|-a|^n, |b\pi - a|^n))$, ce que nous noterons m^n. Donc $|P_n| \leq \frac{(m\pi)^n}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Dès lors, pour n assez grand, $\forall x \in [0,\pi],\ |P_n(x)| \leq \varepsilon$. D'où, pour n assez grand :

$$|I_n| = \left|\int_0^\pi P_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x\right| \leq \int_0^\pi |P_n(x)||\sin x|\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

Finalement, $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Attention, P_n est de degré $2n$, pas n. Les n premières dérivées de P_n sont nulles en 0 et en a/b car 0 et a/b sont des racines de P_n d'ordre n.

Ensuite, si on dérive P_n k fois, on obtient, par la formule de Leibnitz :

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!}\sum_{i+j=k}\binom{k}{i} n(n-1)...(n-i+1)X^{n-i} n(n-1)...(n-j+1)b^j(bX-a)^{n-j}$$

Si on calcule $P_n^{(k)}(0)$, quels seront les termes non nuls dans la somme ci-dessus ? Tous ceux pour lesquels $i < n$ possèdent un X dedans (à une certaine puissance non nulle), donc sont nuls pour $X = 0$. Dès lors, les termes restants vérifient $i \geq n$, donc le préfacteur $n(n-1)...(n-i+1)$ contient tous les entiers de 1 à n et se simplifie avec $\frac{1}{n!}$ devant la somme. Ainsi, les termes non nuls sont des entiers et $P_n^{(k)}$ est entier.

Il en va exactement de même pour $P_n^{(k)}(a/b)$ qui est aussi entier.

Supposons que $\pi = a/b$. En particulier, $P_n = \frac{b^n}{n!}X^n(X-\pi)^n$.

Notons qu'alors, $P_n > 0$ sur $]0,\pi[$ et $\sin x$ aussi, donc $I_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue strictement positive).

Ensuite, on effectue $2n$ intégrations par partie sur I_n. Pour la première, on dérive P_n et on intègre sin : $I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x)\cos x \ \mathrm{d}x$. On poursuit en dérivant P_n' et intégrant cos, puis en dérivant P_n'' et en intégrant sin, etc. On obtient finalement une somme de crochets $\left[P_n^{(k)}(x)\sin x\right]_0^\pi$ et $\left[P_n^{(k)}(x)\cos x\right]_0^\pi$ ainsi qu'une intégrale résiduelle $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\sin x \ \mathrm{d}x$ ou bien $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\cos x \ \mathrm{d}x$.

Cette intégrale résiduelle est un entier car $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant entier, et $\int_0^\pi \sin = 2$, $\int_0^\pi \cos = 0$. Chaque crochet est un entier car sin et cos évalués en 0 et π sont des entiers et $P_n^{(k)}$ aussi (car $\pi = \frac{a}{b}$ et qu'on a montré cette propriété en deuxième question). Finalement, I_n est bien un entier comme somme d'entiers.

Mais si I_n est un entier non nul pour tout n, alors $I_n \to 0$ est impossible. On a une contradiction, ce qui montre que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 2.373 (Question subsidiaire)**.** On va utilisé le fait que $\ln(n!) = \ln \prod_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Notons qu'on peut faire commencer la somme à $k = 2$. Donc si on arrive à avoir un encadrement de $\ln k$, on en aura une de $\ln(n!)$. Or $x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement croissantes, donc :

$$\int_{k-1}^{k} \ln \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln$$

Ensuite, on somme l'inégalité de gauche pour $k = 2$ à $k = n$, on trouve : $\int_1^n \ln \leq \ln(n!)$. Puis on somme celle de droite pour $k = 1$ à $k = n-1$: $\ln((n-1)!) \leq \int_1^n \ln$; d'où, en ajoutant $\ln n$ de chaque côté : $\ln(n!) \leq \int_1^n \ln + \ln n$.

Rappelons que $x \mapsto x \ln x - x$ est la primitive de ln qui vaut -1 en 1. Cela donne l'encadrement suivant :

$$n \ln n - n - (-1) \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n - (-1) + \ln n$$

Finalement : $\ln(n!) - (n \ln n - n)$ est compris entre 1 et $\ln n + 1$, ce qui donne l'asymptotique souhaitée : $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

<u>**N.B. :**</u> Cette estimation est souvent utilisée en informatique. En effet, si on veut par exemple trier dans l'ordre croissant une liste de n valeurs, on se rend compte que la liste de départ peut être n'importe laquelle de $n!$ permutations possibles de ces valeurs. De là, il est possible de monter que tout algorithme (qui procède par comparaisons) doit effectuer au moins $\ln(n!)$ comparaisons. Beaucoup d'autre exemples d'algorithmes peuvent se comprendre comme la "visite" d'un certain sous-ensemble des permutations, leur complexité est souvent minorée par $\ln(n!)$.

Retour à Khôlle 122 : Irrationalité de π, Équivalent de $\ln(n!)$.

2.123 Correction Khôlle 123 : Méthode de Simpson

Retour à Khôlle 123 : Méthode de Simpson.

Exercise 2.374 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.375 (Problème principal)**.** Si $k = 0$, alors, $x \mapsto (x+h)(x-h)(x-k)$ est une fonction impaire : son intégrale sur un domaine symétrique, tel $[-h, +h]$, est nulle. Réciproquement, si $k \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\int_{-h}^{+h} (x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x = \int_{-h}^{+h} (x+h)(x-h)x\mathrm{d}x - k \int_{-h}^{+h} (x+h)(x-h)\mathrm{d}x$$

La première intégrale est nulle (en vertu de l'argument précédent), la deuxième non : on intègre strictement négative. Comme $k \neq 0$, on a bien $\int_{-h}^{+h} (x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x \neq 0$.

Ensuite, pour trois réels a, b, c, en appliquant les changements de variable $x \mapsto x - \frac{a+b}{2}$ puis $x \mapsto \frac{2}{b-a} x$ à l'intégrale $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int_{-1}^{+1} (x+1)(x-1)\left(x - \frac{2}{b-a}\left(c - \frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi, en utilisant le résultat précédent, on trouve que : $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = 0 \iff c = \frac{a+b}{2}$.

Oui, cette troisième question est bien une application des précédents !

Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ le polynôme qui interpole les points $(a, P(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et $(b, P(b))$. Alors $P - Q$ admet a, b et $\frac{a+b}{2}$ comme racines. Or c'est un polynôme de degré au plus 3, donc $P - Q = \lambda(X-a)(X-b)\left(X - \frac{a+b}{2}\right)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Dès lors, en intégrant sur $[a, b]$, on se retrouve dans le cas précédent : $\int_a^b P - Q = 0$. De manière plus utile : $\int_a^b P = \int_a^b Q$. Reste à calculer Q et son intégrale. Cela se fait via l'interpolation de Lagrange. En notant $c = \frac{a+b}{2}$:

$$Q = P(a)\frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + P(b)\frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + P(c)\frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Or $\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \frac{-1}{6}(b-a)^3$; $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^3$ et $\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^3$. Il s'ensuit, après quelques calculs rébarbatifs :

$$\int_a^b P = \int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

N.B. : Cette formule a une utilité ! Si on souhaite estimer l'intégrale d'une fonction quelconque entre a et b, l'idée de la méthode de Simpson est de poser Q, le polynôme interpolateurs de f aux points d'abscisses a, b et $\frac{a+b}{2}$, et d'estimer l'intégrale de f par celle de Q, c'est-à-dire par $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. L'erreur commise est alors majorée par $\frac{(b-a)^5}{2880} \sup |f^{(4)}|$ et peut même être améliorer en $\frac{(b-a)^5}{6480} \sup |f^{(4)}|$ voire plus dans certains cas, en choisissant une subdivision légèrement plus intelligente. Cette méthode à l'avantage de donner de très bons résultats quand on connaît des valeurs de f à intervalles réguliers.

Exercise 2.376 (Question subsidiaire)**.** Il y a plein de pistes possibles sur cette question. Toutes sont intéressantes à explorer mais peu donnent la solution.

Regardons l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (f(t)-\alpha)(f(t)-\beta)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2 - (\alpha+\beta)\int_0^1 f + \alpha\beta = \int_0^1 f^2 + \alpha\beta$$

Or $\alpha \leq f(t) \leq \beta$, donc $(f(t)-\alpha)(f(t)-\beta) \leq 0$ par définition de α et β, donc $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.

Retour à Khôlle 123 : Méthode de Simpson.

2.124 Correction Khôlle 124 : Problème d'optimisation, Norme $\mathcal{L}^\infty$

Retour à Khôlle 124 : Problème d'optimisation, Norme $\mathcal{L}^\infty$.

Exercise 2.377 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.378 (Problème principal)**.** La dérivé de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ est $x \mapsto e^{-x}(f'(x)-f(x))$, donc, pour $f \in \mathcal{E}$:

$$\int_0^1 e^{-t}(f'(t)-f(t))\mathrm{d}t = \left[e^{-x}f(x)\right]_0^1 = e^{-1}$$

Ensuite, comme $e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{e} = \left|\int_0^1 e^{-t}(f'(t)-f(t))\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 e^{-t}|f(t)-f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t)-f(t)|\mathrm{d}t$$

S'il y a égalité alors $\int_0^1 e^{-t}|f(t)-f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)-f(t)|\mathrm{d}t$. Cette égalité revient à $\int_0^1 (1-e^{-t})\,|f(t)-f(t)|\mathrm{d}t = 0$. Or si $f' \neq f$, alors l'intégrande est positive sur $[0,1]$ et strictement positive en au moins un point, donc l'intégrale serait non nulle. Il s'ensuit que $f(x) = \lambda e^x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{E}$, cela est impossible : il n'y a pas de cas d'égalité.

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, {}^1\!/\!_n[$ et sur $]{}^1\!/\!_n, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En ${}^1\!/\!_n$, elle est continue car les limites à gauche et à droite coïncident (de valeur $e^{1/n-1}$). Sa dérivée sur $[0, {}^1\!/\!_n[$ vaut $f_n'(x) = n\left((2-2x)+(2x-nx^2)\right)e^{x-1} = n\left(2-nx^2\right)e^{x-1}$ et sur $[{}^1\!/\!_n, 1]$, elle vaut $f_n'(x) = e^{x-1}$. Là encore, les limites à droite et à gauche coïncident en ${}^1\!/\!_n$, donc f_n est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$: $f_n \in \mathcal{E}$.

Reste à calculer $\int_0^1 |f_n' - f_n|$. Les fonctions f_n' et f_n sont égales sur $[{}^1\!/\!_n, 1]$, et leur différence vaut $2n(1-nx)e^{x-1}$ sur $[0, {}^1\!/\!_n]$. Donc, en effectuant le changement de variable $u = nx$:

$$\int_0^1 |f'-f| = \int_0^{1/n} 2n(1-nt)e^{t-1}\mathrm{d}t = \frac{2n}{e}\int_0^1 (1-u)\,e^{\frac{u}{n}}\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-u)e^{u/n}\mathrm{d}u$$

Ensuite, $\frac{2}{e}\int_0^1 (1-x) = \frac{2}{e}\frac{1}{2} = \frac{1}{e}$. D'autre part, sur $[0,1]$, $x \mapsto e^{x/n}$ est majorée par $e^{1/n}$, donc on obtient :

$$\left|I_n - \frac{1}{e}\right| \leq \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left|e^{t/n}-1\right|\mathrm{d}t \leq \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left|e^{1/n}-1\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\left(e^{1/n}-1\right)$$

En particulier, quand $n \to +\infty$, on trouve $I_n \to \frac{1}{e}$, donc on a montré que $\frac{1}{e}$ est la borne inférieure $\inf_{f \in \mathcal{E}} \int_0^1 |f' - f'|$: la valeur $\frac{1}{e}$ minore $\int_0^1 |f' - f'|$ pour $f \in \mathcal{E}$, et il existe une suite d'élément de $\left\{ \int_0^1 |f' - f'| \ ; \ f \in \mathcal{E} \right\}$ qui tend vers $\frac{1}{e}$.

Exercise 2.379 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.361.

Retour à Khôlle 124 : Problème d'optimisation, Norme $\mathcal{L}^\infty$.

2.125 Correction Khôlle 125 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$

Retour à Khôlle 125 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$.

Exercise 2.380 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.381 (Problème principal)**.** L'intégrale d'une fonction sur un intervalle symétrique est égale à l'intégrale de sa partie paire. En effet, si $f = g + h$ avec g paire et h impaire, alors :

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{a} g + \int_{-a}^{a} h = \int_{-a}^{a} g = 2 \int_0^a g$$

Or on sait que la partie paire de f est $x \mapsto 1/2\,(f(x) + f(-x))$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left(\frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}} + \frac{p(-x)}{1 + t(-x)^{i(-x)}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} p(x) \frac{1 + t(x)^{-i(x)} + 1 + t(x)^{i(x)}}{\left(1 + t(x)^{i(x)}\right)\left(1 + t(x)^{-i(x)}\right)} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} p(x) \frac{2 + t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}}}{1 + t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}} + t(x)^{i(x)} \frac{1}{t(x)^{i(x)}}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} p(x) \times 1 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a p(x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On en déduit que cette intégrale ne dépend pas de t ni de i (du moment que p et t sont paires et i impaire).

En particulier, les deux intégrales proposées sont égales et valent :

$$\int_0^e x^4 = \frac{e}{5}$$

Exercise 2.382 (Question subsidiaire)**.** Il faut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. Si on cherche à l'appliquer entre 0 et 1, on n'exploitera pas les deux informations $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. L'idée est de l'appliquer au choix entre 0 et $1/2$ ou entre $1/2$ et 1, suivant la position de $f(1/2) - \frac{f'(1/2)}{2}$ par rapport à $1/2$. Précisément :

- Si $f(1/2) \leq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[1/2, 1]$:

$$\left|f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!}f'(1)\right| \leq \frac{\sup_{[1/2,1]}|f''|}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Or $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$, donc $\left|f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!}f'(1)\right| = 1 - f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[1/2,1]}|f''| \geq 4$.
- Si $f(1/2) \geq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1/2]$:

$$\left|f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!}f'(0)\right| \leq \frac{\sup_{[0,1/2]}|f''|}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Or $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, donc $\left|f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!}f'(0)\right| = f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[0,1/2]}|f''| \geq 4$.

Dès lors, on sait que f'' est une fonction continue dont le suprémum est supérieur à 4 : par continuité, il existe au moins un point $c \in [0, 1]$ tel que $f''(c) \geq 4$.

Plus généralement, l'utilisation d'un "point de transfert" comme $1/2$ ci-dessus permet parfois d'améliorer les inégalités en utilisant des conditions sur deux bords en même temps, ici en 0 et en 1.

Retour à Khôlle 125 : Changement de variable, Minoration de $|f''|$.

2.126 Correction Khôlle 126 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue

Retour à Khôlle 126 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue.

Exercise 2.383 (Question de cours)**.** Regardons l'image de $\sigma(a)$ par $\tau = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$. On trouve $\tau(\sigma(a)) = \sigma(t(a)) = \sigma(b)$. De la même manière, $\tau(\sigma(b)) = \sigma(a)$. Si $k \notin \{\sigma(a), \sigma(b)\}$, alors soit j tel que $\sigma(j) = k$ (ce qui existe car σ est une bijection) : $j \notin \{a, b\}$, donc $t(j) = j$, puis $\tau(k) = \sigma(t(j)) = \sigma(j) = k$. Ainsi : $\tau = (\sigma(a)\ \sigma(b))$ (la transposition qui échange $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$).

Exercise 2.384 (Problème principal)**.** Comme P est de degré impair, il possède une racine réel, disons a. Alors, par la propriété de l'énoncé : $\forall n,\ |f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$, c'est selon) :

$$|f(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\sup_{[a,x]}|f^{(n)}| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\sup_{[a,x]}|P|$$

Le terme $\sup_{[a,x]}|P|$ ne dépend pas de n, donc quand $n \to +\infty$, le membre de droite tend vers 0, donc $f(x) = 0$. f est la fonction nulle.

Si P est autorisée à être pair, alors l'exemple $P = 1$ et $f = \sin$ montre qu'on peut trouver une fonction non nulle dont toutes les dérivées sont bornées par P.

N.B. : Par contre, on a montré quelque chose de plus puissant : si f a toutes ses dérivées nulles en un même point a, alors elle est nulle ou bien la suite $(f^{(n)}(x))_n$ doit croître au moins aussi vite que $\frac{n!}{(x-a)^n}$. L'exemple usuel $x \mapsto e^{-1/x^2}$, qui a toutes ses dérivées nulles en 0 est donc plutôt représentatif de ce type de fonctions (elles se construisent avec des exponentielles, typiquement).

Exercise 2.385 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.360.

Retour à Khôlle 126 : Majoration polynômiale, Riemann-Lebesgue.

2.127 Correction Khôlle 127 : Type cyclique, Coordonnées de Plücker

Retour à Khôlle 127 : Type cyclique, Coordonnées de Plücker.

Exercise 2.386 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.387 (Problème principal)**.** Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ où τ est une transposition. On s'intéresse au type cyclique de $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Écrivons $\tau = (a\ b)$, si $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, alors $s(x) = x$ et $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ et $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, donc $s = (\sigma(a)\ \sigma(b))$. De fait, pour une permutation quelconque $\gamma \in \mathcal{S}_n$, on peut écrire γ comme un produit de transposition $\gamma = \tau_1\tau_2...\tau_k$, et regarder $s = \sigma\gamma\sigma^{-1}$:

$$s = \sigma\tau_1...\tau_k\sigma^{-1} = \left(\sigma\tau_1\sigma^{-1}\right)\left(\sigma\tau_2\sigma^{-1}\right)...\left(\sigma\tau_k\sigma^{-1}\right)$$

De fait, en changeant tous les $[1, n]$ qui apparaissent dans la décomposition en produit de cycles de γ par $[\sigma(1), \sigma(n)]$, on obtient la décomposition en produit de cycles de $\sigma\gamma\sigma^{-1}$. Ainsi, le type cyclique de γ n'a pas été modifié par la conjugaison.

L'inverse d'un p-cycle est aussi un p-cycle (c'est le même cycle écrit dans l'ordre inverse), donc en décomposant γ en produit de cycles à supports disjoints, puis en inversant chacun de ses cycles, on obtient bien γ^{-1} avec le même type cyclique.

On a en fait montré quelque chose de bien plus puissant tout à l'heure : on a montré que deux permutations qui ont même type cyclique sont conjuguées. En effet, soient deux permutations de même type cyclique γ, γ', on les écrit comme produit de cycle $\pi_1\pi_2...\pi_k$ et $\pi'_1\pi'_2...\pi'_k$ on définit la permutation σ qui à π_1 associe π'_1, etc ("associer" signifie que si $\pi_1 = (a_1\ a_2\ ...\ a_p)$ et $\pi'_1 = (b_1\ b_2\ ...\ b_p)$ alors $\sigma(a_i) = b_i$). Un fois fait, on a $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma'$.

En particulier, on a que σ^{-1} est du même type cyclique que σ, donc elles sont conjuguées. Cela est assez particulier comme propriété et n'est pas vrai dans un groupe quelconque (par exemple, c'est faux dans un groupe cyclique où un groupe commutatif).

Exercise 2.388 (Question subsidiaire)**.** Un plan de $\mathbb{R}^k$ est défini par la donnée de deux vecteurs non-colinéaires, disons $\vec{u}$, $\vec{v}$. On peut construire la matrice M dont la première ligne est les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base canonique, et la deuxième ligne de M est les coordonnées de $\vec{v}$. On calcule les coordonnées de Plücker $(p_{i,j})_{1\leq i<j\leq k}$. Il y a $\frac{k(k-1)}{2}$ coordonnées de Plücker, notons $\mathbf{p}(\vec{u},\vec{v})$ ce vecteur de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Maintenant, si on prend une autre base du même plan, disons $(\vec{u'},\vec{v'})$, il existe une matrice de transition $A \in \mathcal{M}_{2,2}$ inversible telle que $\begin{pmatrix} \vec{u'} \\ \vec{v'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$. Donc la nouvelle matrice de cette base est $M' = AM$. Les coordonnées de Plücker issues de cette nouvelle matrice valent $p'_{i,j} = \det\left(A \times \begin{bmatrix} m_{1,i} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,j} \end{bmatrix}\right) = \det A \times p_{i,j}$. Donc tous paramétrage d'un même plan donnent les mêmes coordonnées de Plücker à une constante (multiplicative) près.

En outre, pour un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^k$, et une base $(\vec{u},\vec{v})$, il n'est pas possible que tous les $p_{i,j}(\vec{u},\vec{v})$ soient nuls. En effet, dans le cas contraire, pour tout $i<j$, les vecteurs (de $\mathbb{R}^2$) (u_i,v_i) et (u_j,v_j) seraient colinéaires car $0 = p_{i,j}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$. En particulier, au moins l'un des (u_i,v_i) est non nul (sinon $\vec{u}=\vec{v}=\vec{0}$), disons $v_1 \neq 0$. Alors, $\forall i$, $\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_1}{v_1}$, ce qui est exactement la condition pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires : c'est impossible car $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \mathcal{P}$ est un plan.

Ainsi, pour un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^k$, on peut construire l'ensemble de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$: $\mathbf{p}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{p}(\vec{u},\vec{v})\ ;\ \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \mathcal{P}\}$. Le raisonnement précédent montre que $\mathbf{p}(\mathcal{P})$ est une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

On va montrer que cette application est injective. Pour ce faire, soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^k$ et $(\vec{u},\vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$. Supposons qu'on connaît $\mathbf{p}(\vec{u},\vec{v})$, on va prouver qu'on peut retrouver $\mathcal{P}$. Par le raisonnement précédent, on sait qu'au moins l'un des $p_{i,j}(\vec{u},\vec{v})$ est non nul, disons $p_{I,J}(\vec{u},\vec{v})$. La matrice $A = \begin{bmatrix} u_I & u_J \\ v_I & v_J \end{bmatrix}$ est inversible (sont déterminant est $p_{I,J}(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$). Par suite, la matrice $AM = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ donne à nouveau une base $(\vec{x},\vec{y})$ de $\mathcal{P}$, mais cette fois la colonne I de AM est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et sa colonne J est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dès lors, $p_{I,j}(\vec{x},\vec{y}) = 1\times y_j - 0\times x_j = y_j$, et $p_{i,J}(\vec{x},\vec{y}) = 0\times y_i - 1\times x_i = -x_i$, donc, comme on connaît toutes les coordonnées de Plücker $\mathbf{p}(\vec{x},\vec{y}) = \mathbf{p}(\vec{u},\vec{v})$, on connaît toute la matrice AM, donc on connaît une base de $\mathcal{P}$: on connaît $\mathcal{P}$. Ainsi, l'application $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ est une application injective de l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$ vers l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Notons que si on dispose de $\mathbf{p}(\mathcal{P})$, on peut construire une base "canonique" de $\mathcal{P}$. On prends le plus petit J tel que $p_{1,J}(\mathcal{P}) \neq 0$, et les deux lignes de la matrice suivante donne une base de $\mathcal{P}$ (attention à l'ordre dans les indices) :

$$\frac{1}{p_{1,J}}\begin{pmatrix} p_{1,J} & p_{2,J} & p_{3,J} & \dots & p_{J-1,J} & 0 & -p_{J+1,J} & -p_{J+2,J} & \dots & -p_{k,J} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{1,J} & p_{1,J+1} & p_{1,J+2} & \dots & p_{1,k} \end{pmatrix}$$

Prenons 4 indices différents : $i < j < k < l$. Alors on peut regarder la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,l} & m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} & m_{2,j} & m_{2,l} \end{array}\right)$$

On peut calculer le déterminant de M par blocs :

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} \\ m_{2,i} & m_{2,k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,j} & m_{2,l} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,k} & m_{2,j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} \end{vmatrix} \\ &= p_{i,k} \quad p_{j,l} + \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,k} \\ m_{2,j} & m_{2,k} \end{vmatrix} p_{i,l} \\ &= p_{i,k} \quad p_{j,l} + p_{j,k} \quad p_{i,l} \end{aligned}$$

D'autre part, si on échange les deux colonnes centrales de M, le déterminant de cette nouvelle matrice est $-\det M$, et on a ainsi, toujours avec un déterminant par blocs :

$$-\det M = \left|\begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,j} & m_{1,l} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,j} & m_{2,l} & m_{2,l} \end{array}\right| = p_{i,k} \times 0 - p_{i,j}(-p_{j,k}) = p_{i,j}p_{j,k}$$

On obtient la relation souhaitée.

Il s'ensuit que si le vecteur directeur d'une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ ne respecte pas ces égalités (il y a autant d'égalités que de quadruplets), alors il ne peut pas s'agir des coordonnées de Plücker d'un plan de $\mathbb{R}^k$: l'application $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ n'est pas une bijection.

N.B. : Par contre, ce qui est vrai, est bien plus difficile à montrer, c'est que toute droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ qui respecte les relations de Plücker ci-dessus est bien de la forme $\mathbf{p}(\mathcal{P})$. L'application de Plücker $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ donne plein d'informations très importantes sur la grassmannienne $\mathbf{Gr}(2, k)$, l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$, et se généralise pour l'étude de la grassmannienne $\mathbf{Gr}(n, k)$, l'ensemble des sous-espaces de dimension n de $\mathbb{R}^k$.

Retour à Khôlle 127 : Type cyclique, Coordonnées de Plücker.

2.128 Correction Khôlle 128 : Permutation d'ordre 2, Démonstration de Zagier

Retour à Khôlle 128 : Permutation d'ordre 2, Démonstration de Zagier.

Exercise 2.389 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.390 (Problème principal)**.** On regarde la partition de $[1,n]$ en orbites de σ. Comme $\sigma^2 = id$, l'orbite de x sous l'action de σ est soit $\{x\}$, soit $\{x, \sigma(x)\}$. Or on sait que la somme des cardinaux des orbites est exactement n (tout les nombres entre 1 et n apparaissent dans exactement une orbite). Donc, comme n est impair, si toutes les orbites étaient du type $\{x, \sigma(x)\}$, alors on aurait une contradiction (car $n = \sum \#\mathcal{C}_x = \sum 2$ serait pair). Ainsi, il existe au moins un point fixe (une orbite de taille 1)..

Exercise 2.391 (Question subsidiaire)**.** Pour une explication visuelle, on pourra regarder cette vidéo.

Premièrement, l'ensemble $\mathcal{S}$ est fini car il est inclus dans $[1,p]^3$.

Comme f est une involution de $\mathcal{S}$ (on fera attention à vérifier que son image est dans $\mathcal{S}$), on peut écrire $\mathcal{S}$ comme la réunion disjointe des $\{\alpha, f(\alpha)\}$ pour α dans une certaine partie de $\mathcal{S}$. Si f n'a pas de point fixe, alors tous les $\{\alpha, f(\alpha)\}$ sont de cardinal 2 et le cardinal de $\mathcal{S}$ est alors pair. Ainsi, la supposition $\#\mathcal{S}$ impair assure que l'application a un point fixe, c'est-à-dire qu'il y a un élément de la forme (a,b,b) dans $\mathcal{S}$. On a alors $p = a^2 + (2b)^2$, une écriture comme somme de deux carrés, comme souhaitée.

Reste à montrer que $\#\mathcal{S}$ est impair, et pour ce faire, on va juste montrer que g est une involution de $\mathcal{S}$ avec 1 seul et unique point fixe. Soit $(x,y,z) \in \mathcal{S}$, alors on peut regarder le problème matriciellement : $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où M est l'une des trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche un point fixe de g, c'est-à-dire un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que $(M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(M - I_3)$.

On calcul les trois déterminants de $M - I_3$ pour les matrices ci-dessus : 2, 0 et 2. Ainsi, seule la deuxième a un noyau non nul. En vérifiant que $(0,0,0) \notin \mathcal{S}$, on obtient donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne que ce noyau est de dimension 2 et a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. De fait, $x = y$ et z peut être choisi indépendamment. Les conditions pour que g ait cette formule impose que $-z < 0 < y$, ce qui ne pose aucun problème. Cependant, on doit aussi avoir $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, donc $x^2 + 4yz = p$, ce qui induit, avec $x = y$, que $x|p$. Comme $x = p$ contredit l'égalité, on a $x = y = 1$, puis $z = \frac{p-1}{4}$ (ce qui est possible car on a justement supposé que $p = 1$ [4]). Il y a un seul point fixe : $(1, 1, \frac{p-1}{4})$.

Reste à montrer que g est une involution. On constate que si $x < y - z$, alors $g(x, y, z) = (a, b, c)$ vérifie $a > 2b$, ainsi :

$$g \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De la même manière, si $x > 2y$, alors $g(x, y, z) = (a, b, c)$ vérifie $a < c - b$ et l'inverse du calcul précédent permet de conclure. Enfin, le cas central est stabilisé par g et on a $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, le seul point fixe de l'involution g est $(1, 1, \frac{p-1}{4})$, et on en déduit que $\#\mathcal{S}$ est impair, comme désiré tout nombre premier $p = 1$ [4] s'écrit comme la somme de deux carrés.

Retour à Khôlle 128 : Permutation d'ordre 2, Démonstration de Zagier.

2.129 Correction Khôlle 129 : Théorème de Futurama, Sous-espaces stricts

Retour à Khôlle 129 : Théorème de Futurama, Sous-espaces stricts.

Exercise 2.392 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.393 (Problème principal)**.** La solution est ici.

Exercise 2.394 (Question subsidiaire)**.** $\mathbb{Q}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^2} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x)$ est bien la réunion dénombrable d'espaces stricts.

Pour $\mathbb{K}$, on a $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}_n(X)$.

Soit $n = \dim E$. On pose, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + ... + \lambda^{n-1} e_n$. On raisonne par l'absurde en supposant $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ où E_k est un sous-espace stricte de E. On s'intéresse à la manière de "ranger" les $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ dans les $(E_i)_i$. On sait que $\dim E_k \leq n - 1$. Supposons que $(x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_n})$ soient n vecteurs de E_k construit comme expliqués précédemment. Alors, comme la taille de la famille dépasse la dimension de l'espace, cette famille et liée. En particulier, son déterminant est nul : $\det(x_{\lambda_i})_i = VdM(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$ (VdM désigne le déterminant de Van der Monde). Dès lors, il existe un terme de produit qui est nul : $\exists i \neq j, \lambda_i = \lambda_j$. Ainsi, il ne peut y avoir n vecteurs de type x_λ différents : $\#\{\lambda \in \mathbb{K}; x_\lambda \in E_k\} \leq n - 1$. Cependant, par hypothèse $E = \bigcup_k E_k$, donc :

$$\mathbb{K} = \{\lambda; x_\lambda \in E\} = \bigcup_k \{\lambda; x_\lambda \in E_k\}$$

Or on a prouvé que le dernier ensemble est dénombrable, alors que $\mathbb{K}$ ne l'est pas (pour rappel, on a pris $\mathbb{K}$ un corps non-dénombrable comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On en déduit que notre hypothèse est impossible : on ne peut pas écrire un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie comme une réunion dénombrable de sous-espaces stricts.

Retour à Khôlle 129 : Théorème de Futurama, Sous-espaces stricts.

2.130 Correction Khôlle 130 : Groupe alterné

Retour à Khôlle 130 : Groupe alterné.

Exercise 2.395 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.396 (Problème principal)**.** On a $\varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\tau)$, donc $\mathcal{A}_n$ est stable par conjugaison.

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$. Comme les transposition engendre $\mathcal{S}_n$, on peut écrire σ comme un produit de transposition. Comme chaque transposition a pour signature -1 et que σ a pour signature $+1$, il a un nombre paire de transposition. Réciproquement, un produit d'un nombre pair de transpositions est dans $\mathcal{A}_n$ car sa signature est $+1$.

La signature d'un p-cycle de $\mathbb{S}_n$ est égale $(-1)^{p-1}$. donc un p-cycle est dans $\mathcal{A}_n$ si et seulement si p est impair. On écrit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ comme un produit de transpositions. Il suffit donc de prouver que le produit de deux transpositions est aussi produit de 3-cycles. On distingue deux cas :

1. Les transpositions sont à supports disjoints : on écrit alors $(i\ j) \circ (k\ l) = (i\ k\ j) \circ (k\ l\ i)$.
2. Les supports des deux transpositions ont un élément en commun : on écrit alors $(i\ j) \circ (i\ k) = (i\ k\ j)$.

ϕ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ car on peut exhiber sa bijection réciproque : $\psi : \sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$. En particulier, $\varepsilon(\phi(\sigma)) = (-1) \times \varepsilon(\sigma)$ car τ est une transposition. De fait, $\phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{S}_n \backslash \mathcal{A}_n$, et réciproquement. On en déduit $\#\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}\#\mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$.

Exercise 2.397 (Question subsidiaire)**.** D'une part, $D\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$ est évident grâce à la signature. Par ailleurs, soient a, b et c distincts. On veut montrer que $(a\ b\ c) \in D\mathcal{A}_n$. Soit σ telle que $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = c$ et $\sigma(c) = b$. On a alors $\sigma(a\,b\,c)\sigma^{-1} = (a\,c\,b) = (a\,b\,c)^2$. Si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a gagné car $\sigma(a\,b\,c)\sigma^{-1}(a\,c\,b)^{-1} = (a\ b\ c) \in D\mathcal{A}_n$. Si $\sigma \notin \mathcal{A}_n$, soient d et e distincts de a, b, c (ce qui est possible car $n \geq 5$). On change σ en $\sigma \circ (d\ e)$, donc on change sa signature et on a $\sigma \circ (d\ e) \in \mathcal{A}_n$, donc on a gagné. Ainsi, on a bien que tous les 3-cycles sont dans $D\mathcal{A}_n$, et comme les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$, on a finalement : $D\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$.

Exercise 2.398 (Question subsidiaire)**.**

Retour à Khôlle 130 : Groupe alterné.

2.131 Correction Khôlle 131 : Centre de $\mathcal{S}_n$, Hyperplan affin

Retour à Khôlle 131 : Centre de $\mathcal{S}_n$, Hyperplan affin.

Exercise 2.399 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.400 (Problème principal)**.** Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ où τ est une transposition. On s'intéresse au type cyclique de $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Écrivons $\tau = (a\ b)$, si $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, alors $s(x) = x$ et $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ et $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, donc $s = (\sigma(a)\ \sigma(b))$. Donc $\phi_{(a\ b)}(\sigma) = (\sigma(a)\ \sigma(b))$.

Soit σ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{S}_n$. En particulier, σ commuta avec toutes les permutations $(a\ b)$, donc $\phi_{(a\ b)}(\sigma) = (a\ b)$. Ainsi, $(\sigma(a)\ \sigma(b)) = (a\ b)$. Il s'ensuit que $\sigma(a) \in \{a, b\}$. Soit $c \neq a, b$, alors on a aussi $\phi_{(a\ c)}(\sigma) = (a\ c)$ puis $\sigma(a) \in \{a, c\}$. On en déduit par intersection que $\sigma(a) = a$. Finalement, le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{id\}$.

Exercise 2.401 (Question subsidiaire)**.** Premièrement, comme $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^n$, donc on peut trouver des coordonnées $x_0, ..., x_{n-1}$ telles que $\vec{r}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \vec{r}_k$. Ensuite, l'hyperplan $H_{\mathbf{r}}$ est l'hyperplan affine contenant le point $r_0\vec{r}_0$ et les vecteurs $h_i\vec{r}_i - h_0\vec{r}_0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ces derniers forment une famille libre car la famille des $(h_i\vec{r}_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ est libre (les h_i étant non nuls) et ajouter $-h_0\vec{r}_0$ revient à faire une translation (qui n'envoie aucun des vecteurs sur $\vec{0}$), donc préserve la liberté. Ainsi :

$$H_{\mathbf{r}} = h_0\vec{r}_0 + \text{Vect}\,(h_i\vec{r}_i - h_0\vec{r}_0)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$$

Dès lors, chercher h_n tel que $h_n\vec{r}_n \in H_{\searrow}$ revient à cherche h_n et $(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ tels que :

$$h_n\vec{r}_n - h_0\vec{r}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\,(h_k\vec{r}_k - h_0\vec{r}_0)$$

En utilisant $\vec{r}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\vec{r}_k$, on peut écrire le système sous forme matriciel dans la base $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$.

Sur $\vec{r}_i$, $i \neq 0$, on a l'équation :

$$h_n x_i = \alpha_i h_i \qquad \text{soit} \qquad -\alpha_i h_i + h_n x_i = 0$$

Sur $\vec{r}_0$, on a l'équation :

$$h_n x_0 - h_0 = -h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \qquad \text{soit} \qquad h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + h_n x_0 = h_0$$

On peut donc représenter le système par l'équation matricielle (rappel : h_n et α_i sont les variables, h_i et x_i sont les paramètres) :

$$\begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & \dots & h_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

On cherche seulement h_n. Nul besoin d'inverser toute la matrice du système.

Notons $M = \begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & \dots & h_0 & x_0 \end{pmatrix}$. Alors on veut la dernière ligne de $\frac{1}{\det M}\left(\mathrm{com} M\right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, on a seulement besoin du déterminant de M et de la cellule en bas à droite de $\mathrm{com} M$ (qui est la même que se transposée).

Or la cellule en bas à droite de la comatrice vaut $+\begin{vmatrix} -h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -h_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i$. Reste à calculer le déterminant. Regardons les permutations qui ne donnent pas 0 dans la somme qui définit ce déterminant. Il y a la permutation identité qui donne $+(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \times x_0$, et les seules autres sont les transposition (jn) pour $j \neq n$ qui donnent $-(-1)^{n-2}\prod_{i\neq j}^{1\leq i\leq n-1} h_i \times h_0 x_j$. Le déterminant $\det M$ vaut donc la somme de ces n termes.

Effectuons le calcul final :

$$h_n = \frac{1}{\det M}(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \times h_0 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} h_i}{x_0\prod_{i=1}^{n-1} h_i + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \prod_{i\neq j} h_i} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} x_j/h_j}$$

On préférera bien sûr écrire : $\frac{1}{h_n} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{h_j}$.

N.B. : Cette relation suggère qu'il existe un autre point de vu plus adapté dans lequel les $\frac{1}{h_i}$ sont des nombres qui font sens. C'est en effet le cas, il s'agit du "point de vue dual" : au lieu de considérer les points $h_i\vec{r_i}$ et l'hyperplan qu'ils induisent, on construit les hyperplans affines $H_i = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle \vec{x} | \vec{r_i}\rangle = h_i\}$, l'intersection $\bigcap_{i=0}^{n-1} H_i$ est un unique point $P \in \mathbb{R}^n$, et on se demande ce que doit valoir h_n pour que $P \in H_n$.

Retour à Khôlle 131 : Centre de $\mathcal{S}_n$, Hyperplan affin.

2.132 Correction Khôlle 132 : Unique décomposition, Transformée de Hankel

Retour à Khôlle 132 : Unique décomposition, Transformée de Hankel.

Exercise 2.402 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.403 (Problème principal)**.** Montrons l'existence par récurrence. Soit s une permutation de $\mathcal{S}_n$, et on note $p = s(n)$. $\sigma_n^{n-p}(p) = n$, donc $\sigma_n^{n-p}s$ est une permutation de $[1, n-1]$. Ainsi, par récurrence, on peut obtenir la décomposition souhaitée (en effet : $\left(\sigma_n^{n-p}\right)^{-1} = \sigma_n^p$).

Supposons maintenant qu'on dispose de deux décompositions $s = \sigma_n^{k_n}...\sigma_2^{k_2} = \sigma_n^{j_n}...\sigma_2^{j_2}$ et soit r le plus grand entier tel que $k_r \neq j_r$. On a donc $s' = \sigma_r^{k_r}...\sigma_2^{k_2} = \sigma_r^{j_r}...\sigma_2^{k_2}$, cependant : $s'(r) = \sigma_r^{k_r}(r)$ d'une part et $s'(r) = \sigma_r^{j_r}(r)$ qui sont différents...

Exercise 2.404 (Question subsidiaire)**.** Si $(b_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang p, alors le déterminant de h_n, pour $n \geq p$, contient une colonne nulle $\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \vec{0}$. Réciproquement, si h_n est **entièrement** nulle, alors on a $b_0 = h_0 = 0$, puis, par récurrence, si $b_k = 0$ pour tout $k \leq n-1$, alors on a (regarder les permutations dont le produit ne donne pas 0) :

$$0 = h_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & b_n \\ 0 & 0 & ... & b_n & b_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & b_n & ... & b_{2n-2} & b_{2n-1} \\ b_n & b_{n+1} & ... & b_{2n-1} & b_{2n} \end{vmatrix} = b_n^n$$

Ainsi, par récurrence, on a $b_n = 0$ pour tout n.

Si $(b_n)_n$ respecte une relation de récurrence, disons $b_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k}$ pour tout n, alors, à partir de $n = p$, la p-ième colonne du déterminant de h_n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes précédentes, donc le déterminant est nul :

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k+p} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si $(h_n)_n$ est nul à partir d'un certain rang p, cela signifie en particulier que les colonnes de h_p sont liées. Comme celle de h_{p-1} ne le sont pas on peut trouver $(\alpha_k)_k$ tels que $b_{p+n} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k}$ pour $n \leq p$. on va montrer que cette égalité est vraie pour tout n. Supposons que cette égalité est vrai pour tout $n \leq N+p-1$, alors on regarde h_N. La dernière colonne, C_N, est combinaison linéaire des précédentes, disons $C_N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k C_k$. En particulier, on a l'expression :

$$b_{N+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\beta_k \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{N+j}$$

On a bien la relation de récurrence pour à tous les rangs.

Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Pour n fixé, on note H_b la matrice de Hankel pour $(b_k)_k$ au rang n, i.e. $h_n = \det H_b$, et pareillement pour H_c. On pose $B = \left[\binom{j-1}{i-1}\right]_{i,j}$ la matrice triangulaire supérieure du triangle de Pascal (on adopte la convention usuelle : $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$). On notera que $\det B = 1$ car les coefficients diagonaux valent tous 1. On va montrer que : $H_c = BH_bB^T$. Commençons par remarquer que : $\binom{i+j}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{i}{l}\binom{j}{k-l}$ car choisir k éléments parmi $i+j$ revient à choisir l éléments parmi les i premiers, puis $k-l$ parmi les j derniers pour n'importe quel valeur de l possible. Dès lors, on a :

$$\begin{aligned}
BH_bB^T &= \left[\sum_{k,l=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} b_{k+l-2} \binom{j-1}{l-1}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \sum_{l=1}^{n+1} \binom{j-1}{l-1}\binom{i-1}{k-l+1}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \binom{i+j-2}{k}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\
&= [c_{i+j-2}]_{1\leq i,j\leq n+1} = H_c
\end{aligned}$$

Finalement, en passant au déterminant des deux côtés, en utilisant le fait que le déterminant est multiplicatif, puis que $\det B = \det B^T = 1$, on a que la transformée de Hankel est invariante par la transformation d'Euler.

Retour à Khôlle 132 : Unique décomposition, Transformée de Hankel.

2.133 Correction Khôlle 133 : Inégalité duale, Démonstration de Zagier

Retour à Khôlle 133 : Inégalité duale, Démonstration de Zagier.

Exercise 2.405 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.406 (Problème principal)**.** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec :

$$(x+2y+3z)^2 = \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 \leq \left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|^2 \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|^2 \leq 1\times(1^2+2^2+3^2) = 14$$

Le cas d'égalité est obtenu lorsque $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Inversement, φ est bien un produit scalaire (on peut regarder l'exercice sur les produits scalaires issus de matrices 2×2), donc on peut l'utiliser pour regarder l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le produit scalaire ente $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$:

$$(x+y+z)^2 = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 \leq \left|\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|\right|_\varphi^2 \left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right|\right|_\varphi^2 \leq 1\times(1^2+2\times {}^1/_2{}^2+3\times {}^1/_3{}^2) = {}^{11}/_6$$

Exercise 2.407 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.391.

Retour à Khôlle 133 : Inégalité duale, Démonstration de Zagier.

2.134 Correction Khôlle 134 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur

Retour à Khôlle 134 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur.

Exercise 2.408 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.409 (Problème principal)**.** $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est linéaire à gauche. En outre, on a, comme P est auto-adjoint :

$$(y|x)_{P,\lambda} = \langle y, x\rangle - \lambda\langle y, Px\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle x, Py\rangle = (x|y)_{P,\lambda}$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est symétrique. Cela montre que $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est bilinéaire.
Soit $x \in E$, alors, d'après Cauchy-Schwartz et l'inégalité sur la norme de P :

$$(x|x)_{P,\lambda} = ||x||^2 - \lambda\langle x, Px\rangle \geq ||x||^2 - ||Px|| \times ||x|| \geq ||x||^2 - ||x|| \times ||x|| = 0$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est positive. Vérifions qu'elle est définie positive. Soit $u \neq \vec{0}$ tel que $(x|x)_{P,\lambda} = 0$, alors, par Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{\lambda}||x||^2 = \langle x, Px\rangle \leq ||x|| \times ||Px||$$

Il s'ensuit que : $\frac{||Px||}{||x||} \geq \frac{1}{\lambda}$, donc la norme de P est plus grande que $\frac{1}{\lambda} > 1$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, on en déduit que $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est bien définie positive : c'est un produit scalaire.

Exercise 2.410 (Question subsidiaire)**. Il est fortement conseillé de faire des dessins !** On obtient la construction de la médiatrice et du plan médiateur.

On a la suite d'équivalence :

$$\begin{aligned}
&x \in H \\
\Leftrightarrow &||u - x|| = ||v - x|| \\
\Leftrightarrow &(u - x|u - x) = (v_x|v_x) \\
\Leftrightarrow &||u||^2 - 2(u|x) + ||x||^2 = ||v||^2 - 2(v|x) + ||x||^2 \\
\Leftrightarrow &(u|x) = (v|x) \\
\Leftrightarrow &(u - v|x) = 0
\end{aligned}$$

On a utilisé l'hypothèse $||u|| = ||v||$. Ainsi, on a bien $H = \{u - v\}^\perp$. On en déduit que H est un hyperplan, que sa dimension est $\dim E - 1$, et qu'on peut fabriquer une base orthogonale de E en prenant une base orthogonale de H, disons $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et en lui adjoignant un vecteur normal à H, par exemple $u-v$. Alors, la symétrie orthogonale à H est l'application linéaire s_H qui s'exprime dans cette base par :

$$\left\{\begin{array}{c} \forall i, s_H(e_i) = e_i \\ s_H(u-v) = -(u-v) \end{array}\right.$$

On exprime maintenant u dans cette base : $u = \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(u|u-v)}{||u-v||^2}(u-v)$. Dès lors, on peut calculer $s_H(u)$:

$$\begin{aligned} s_H(u) &= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} s_H(e_i) + \frac{(u|u-v)}{||u-v||^2} s_H(u-v) \\ &= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{-(u|u-v)}{||u-v||^2}(u-v) \\ &= \sum_i \frac{(v|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(v|u-v)}{||u-v||^2}(u-v) \\ &= v \end{aligned}$$

Pour le terme de gauche, on a utilisé $e_i \perp (u-v)$, donc $(u|e_i) - (v|e_i) = 0$. Pour le deuxième terme, on a utilisé $(v|u-v) = (v|u) - ||v||^2 = -\left(||u||^2 - (v|u)\right) = -(u-v|u)$.

Retour à Khôlle 134 : Déformation du produit, Hyperplan médiateur.

2.135 Correction Khôlle 135 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice

Retour à Khôlle 135 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice.

Exercise 2.411 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.412 (Problème principal)**.** On regarde $\left(\sum_i a_i\right) MG^2$ grâce la définition de G, qu'on peut réécrire pour plus de clarté $\sum_i a_i G = \sum_i a_i A_i$:

$$\begin{aligned}
f(G) &= \sum_i a_i \left(||G||^2 + ||A_i||^2 - 2(G|A_i)\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(G \middle| \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(G \middle| \sum_i a_i G\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\sum_i a_i (G|G) \\
&= \sum_i a_i \left(||A_i||^2 - ||G||^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer que :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i a_i\right) MG^2 &= \left(\sum_i a_i\right) \left(||M||^2 + ||G||^2 - 2(M|G)\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right) ||M||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(M \middle| \sum_i a_i G\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right) ||M||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(M \middle| \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i \left(||M||^2 + ||A_i||^2 - 2(M|A_i)\right) - \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 \\
&= \left(\sum_i a_i\right) MA_i^2 - f(G)
\end{aligned}$$

On obtient bien la formule désirée.

En particulier, si on cherche l'ensemble des points M du plan tel que $aAM^2 + bBM^2 = k$, en supposant $a + b \neq 0$, on obtient que cela correspond aux points du plan tels que $(a+b)MG^2 = \mathit{constante}$, c'est donc un cercle de centre G (le barycentre de $\{(A,a);(B,b)\}$). Son rayon vaut $\sqrt{\frac{k-f(G)}{a+b}} = \sqrt{\frac{k-(aAG^2+bBG^2)}{a+b}}$. Dans les cas extrêmes, ce cercle peut se réduire au point G où même à l'ensemble vide (théorème de Leibnitz).

Exercise 2.413 (Question subsidiaire)**.** Quoi qu'il arrive, φ est bi-linéaire et symétrique, avec $\varphi(0,0) = 0$, quelque soit les valeurs de a,b et c.

φ est définie positive si et seulement si $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) > 0$ pour tout x_1, x_2. Or on a :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $a > 0$. Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $c > 0$. Ainsi, $tr(A) > 0$.

Pour le déterminant, on peut utiliser un argument de Cauchy : on regarde le polynôme de degré 2 $at^2 + 2bt + c = \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. Comme ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (il est toujours > 0), son discriminant est strictement négatif, or $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4\det(A)$. Donc $\det(A) > 0$.

Travaillons sur la réciproque maintenant. Si $\det(A) > 0$, alors $\varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ garde un signe (strict) constant quand t varie. En particulier, pour $t = 0$, on en déduit que ce polynôme est du signe de sa valeur en 0 : c. Or, comme $tr(A) = a + c > 0$ et $\det(A) = ac - b^2 > 0$, on en déduit $ac > 0$ d'où a et c de même signe et comme $a + c > 0$, $a > 0$ et $c > 0$, et finalement $\forall y, \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. En outre, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a > 0$. Ainsi, soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_2 \neq 0$, alors soit $t = \frac{x_1}{x_2}$, on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_2^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$$

Si $x_2 = 0$, alors :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) > 0$$

On a prouvé que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Retour à Khôlle 135 : Fonction de Leibnitz, Produit issu de matrice.

2.136 Correction Khôlle 136 : Matrice de Gram, Décomposition d'Iwasawa

Retour à Khôlle 136 : Matrice de Gram, Décomposition d'Iwasawa.

Exercise 2.414 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.415 (Problème principal)**.** On a $X = ((x|e_i))_i$ et $Y = ((y|e_i))_i$, donc :

$$
\begin{aligned}
{}^tXGY &= \sum_{i,j}(x|e_i)(e_i|e_j)(y|e_j) \\
&= \sum_j \left(\sum_i (x|e_i)e_i \middle| e_j \right)(e_j|y) \\
&= \sum_j (x|e_j)(y|e_j) \\
&= \left(x \middle| \sum_j (y|e_j)e_j \right) \\
&= (x|y)
\end{aligned}
$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonal, alors pour tout x, y, on a $(u(x)|u(y)) = (x|y)$, donc pour toute base $(e_i)_i$, on a :

$$G(u(e_1), ..., u(e_n)) = [(u(e_i)\,|u(e_j)\,)]_{i,j} = [(e_i|e_j)]_{i,j} = G(e_1, ..., e_n)$$

Réciproquement, si $G(u(e_1), ..., u(e_n)) = G(e_1, ..., e_n)$ pour une base $(e_i)_i$ orthonormée, alors soit $x, y \in E$. Alors, en notant U la matrice de u dans la base des $(e_i)_i$:

$$(u(x)|u(y)) = {}^t(UX)G(UY) = {}^tX({}^tUGU)Y$$

Or on sait ce que vaut ${}^tUGU$: la matrice U est $[(u(e_i)|e_j]_{i,j}$, donc dans la cellule i, j de ${}^tUGU$, on a ${}^tU_iGU_j$ où U_i est la i-ième colonne de U. Comme ${}^tXUY = (x|y)$, on trouve que la cellule i, j de ${}^tUGU$ est $(U_i|U_j)$, c'est-à-dire $(u(e_i)|u(e_j))$. Donc ${}^tUGU = G(u(e_1, ..., u(e_n))$. Comme $G(u(e_1), ..., u(e_n)) = G(e_1, ..., e_n)$, on trouve :

$$(u(x)|u(y)) = {}^tX({}^tUGU)Y = {}^tXGY = (x|y)$$

Ainsi, u est bien orthogonale.

D'ailleurs, on a prouvé que si $G(u(e_1), ..., u(e_n)) = G(e_1, ..., e_n)$ pour **une** base orthonormée fixée, alors u est orthogonale, donc $G(u(e'_1), ..., u(e'_n)) = G(e'_1, ..., e'_n)$ pour **toute** base orthonormée.

Soit $f_1, ..., f_n$ une base orthonormée et $M = [(e_j|ef_i)]_{i,j}$ la matrice de $(e_i)_i$ dans cette base. Alors :

$$
{}^tMM = \left[\sum_k (e_i|f_k)(e_j|f_k) \right]_{i,j} = \left[\left(e_j \middle| \sum_k (e_i|f_k)f_k \right) \right]_{i,j} = [(e_i|e_j)]_{i,j} = G
$$

Ensuite, $(e_i)_i$ est libre si et seulement si M est inversible, si et seulement si $\det M \neq 0$, si et seulement si $\mathcal{G} = \det G = (\det M)^2 \neq 0$.

On remarque aussi qu'une fois choisie une base $(f_i)_i$ pour orienter E, on a $\mathcal{G} = (\det M)^2$, donc $\mathcal{G}$ est bien le carré du produit mixte.

Cela donne une manière très efficace de calculer le volume du parallélotope engendré par la famille $(e_i)_i$ sans avoir besoin d'une base.

Premièrement, si $x \in F$, alors d'un part $\text{dist}(x, F) = 0$, et d'autre part la famille $(x, e_1, ..., e_p)$ est liée, donc $\mathcal{G}(x, e_1, ..., e_p) = 0$ d'après la conclusion ci-dessus.

Supposons que $x \notin F$ et notons $d = \text{dist}(x, F)$. Alors soit $(f_i)_i$ une base orthonormée de F : le projeté orthogonale de x sur F est $\pi_F(x) = \sum_k (x|f_k) f_k$. D'après le théorème de Pythagore $||\pi_F(x)||^2 + d^2 = ||x||^2$. Par ailleurs, comme $x = (x - \pi_F(x)) + \pi_F(x)$ avec $\pi_F(x) \in F$ et $(x - \pi_F(x)) \in F^\perp$, et que les e_i sont dans F, on a $(x|e_i) = (\pi_F(x)|e_i)$ pour tout i. Donc le déterminant de Gram s'écrit (on note $G = g(e_1, ..., e_n)$ par soucis de place) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(e_1, ..., e_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & (x|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (x|e_n) \\ (x|e_1) & ... & (x|e_n) & ||x||^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & (\pi_F(x)|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (\pi_F(x)|e_n) \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & ||\pi_F(x)||^2 + d^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & (\pi_F(x)|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (\pi_F(x)|e_n) \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & ||\pi_F(x)||^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & G & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & d^2 \end{vmatrix} \\
&= \mathcal{G}(e_1, ..., e_n, \pi_F(x)) + d^2 \times \mathcal{G}(e_1, ..., e_n)
\end{aligned}$$

Or le premier déterminant est nul, car $\pi_F(x) \in F = \text{Vect}(e_1, ...e_n)$, donc la famille $(e_1, ..., e_n, \pi_F(x))$ est liée. On est ramené à l'égalité : $\text{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1, ...e_n, x)}{\mathcal{G}(e_1, ...e_n)}$.

On est capable de calculer immédiatement la distance de x à un sous-espace vectoriel grâce à une base de ce sous-espace.

<u>N.B. :</u> Ici, on peut utiliser le produit mixte pour conclure plus subtilement. Il est conseillé de dessiner le raisonnement qui va suivre dans $\mathbb{R}^3$. En effet, $\mathcal{G}(e_1, ...e_n, x)$ est le (carré du) volume engendré par $(e_1, ...e_n, x)$ alors que $\mathcal{G}(e_1, ...e_n)$ est le (carré du) volume engendré par $(e_1, ...e_n)$. On sait (on le faisait au collège) que le volume engendré par $(e_1, ...e_n, x)$ s'obtient comme le volume engendré par $(e_1, ...e_n)$ multiplié par la "hauteur" de x par rapport au "plan" des $(e_i)_i$ (à l'espace engendré par les $(e_i)_i$). Donc le rapport des deux volume donne la hauteur, ou encore, mis au carré : $\text{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1, ...e_n, x)}{\mathcal{G}(e_1, ...e_n)}$. Le calcul de déterminant ci-dessus justifie algébriquement cette construction géométrique.

Exercise 2.416 (Question subsidiaire)**.** Notons $a_1, ..., a_n$ les colonnes de M. Alors, d'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe une unique famille orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ vérifiant $\forall i,\ \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_i) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$ et $(a_i|u_i) \geq 0$. Comme M est inversible, $(e_i)_i$ est une base. On peut écrire Q la matrice dont les colonnes sont les e_i et $R = [(a_i|e_j)]_{i,j}$. Alors Q est un changement de base orthogonal, donc $Q \in O_n$, et R est triangulaire supérieur (en vertu de $\forall i,\ \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_i) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$), à coefficient diagonaux positifs (en vertu de $(a_i|e_i) \geq 0$). Les coefficients de R sont bien strictement positifs car M est inversible.

Réciproquement, la donnée de Q et R donne un procédé de Gram-Schmidt, donc on a bien l'unicité.

Pour informations, si la matrice M n'est pas inversible, elle peut toujours se décomposer sous la forme $M = QR$, mais cette fois on ne peut plus demander que les coefficients diagonaux de R soient strictement positifs ni que la décomposition soit unique.

Maintenant, prenons $(u_i)_i \in E$. Si la famille est liée, alors son déterminant est nul, donc l'inégalité est vérifiée. Sinon, la matrice M dont les colonnes sont les u_i est inversible, donc on peut donner un décomposition QR de M. Comme R est triangulaire, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, qui sont les $(u_i|e'_i)$, avec $(e'_i)_i$ la base orthonormée décrite par Q. Dès lors, par Cauchy-Schwarz, et avec $||e'_i|| = 1$, on a :

$$|\det_{\mathcal{B}}(u_i)_i| = |\det M| = |\det Q| \times |\det R| = 1 \times \left| \prod_i (u_i|e'_i) \right| \leq \prod_i ||u_i||$$

Cela s'appelle l'inégalité de Hadamard.

Retour à Khôlle 136 : Matrice de Gram, Décomposition d'Iwasawa.

2.137 Correction Khôlle 137 : Produit inhabituel de polynômes, Famille obtuse

Retour à Khôlle 137 : Produit inhabituel de polynômes, Famille obtuse.

Exercise 2.417 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.418 (Problème principal)**.** Fixons i, j. Alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^i \left(\frac{1}{2^k}\right)^j = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{1+i+j}}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2^{1+i+j}} = \frac{2^{1+i+j}}{2^{1+i+j} - 1}$$

Ensuite, écrivons $P = \sum_i p_i X_i$ et $Q = \sum_j q_j X^j$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{i,j} p_i q_j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\right)^i \left(\frac{1}{2^k}\right)^j = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j} - 1}$$

Cette quantité définit bien un produit scalaire :

- $(\lambda P|Q) = \sum_{i,j} \frac{\lambda p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \lambda \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \lambda(P|Q)$
- $(P+R|Q) = \sum_{i,j} \frac{(p_i+r_i) q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} + \sum_{i,j} \frac{r_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = (P|Q) + (R|Q)$
- $(P|Q) = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \sum_{i,j} \frac{q_i p_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = (Q|P)$
- $(P|P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P^2\left(\frac{1}{2^k}\right) \geq 0$ (tous les termes sont positifs)
- Si $(P|P) = 0$, alors on a une somme de termes positifs qui est nulle, donc tous les termes sont nuls : $\forall i,\ \frac{1}{2^k} P^2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$, donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$. Alors, notons $M = \sup_{[0,1]} |Q|$ qui existe car Q est continue. Soit $P_n = (-1)^{n+1} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(X - \frac{1}{2^n}\right)$, le polynôme qui vaut 0 sur tous les $\frac{1}{2^i}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ et 1 en 0. Pour $i \leq n < k$, on a : $\left|\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^i}\right| < \left|0 - \frac{1}{2^i}\right| = \frac{1}{2^i}$, donc $|P_n({}^1/_{2^k})| \leq |P_n(0)| = 1$ en effectuant le produit. Dès lors :

$$\forall n,\ |(P_n|Q)| = \left|\sum_{k>n} \frac{1}{2^k} P_n\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \leq \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} \times 1 \times M = \frac{M}{2^{n+1}} \to 0$$

Cela contredit l'hypothèse $(P_n|Q) = P_n(0) = 1$. Dès lors, il ne peut pas exister de Q tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$.

Autre méthode, proposée par Mathilde Colin de Verdière : Si Q est tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$, alors en particulier, $(XQ|Q) = (XQ)(0) = 0$. Sauf que $(XQ|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} Q^2\left(\frac{1}{2^k}\right)$ est une somme de termes positifs. Donc si cette somme est nulle, alors tous les termes sont nuls, et en particulier : $\forall k,\ Q^2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$, donc Q a une infinité de racines. Il s'ensuit que $Q = \vec{0}$ (le polynôme nul). Mais alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = (P|\vec{0}) = 0$, ce qui n'est pas ce qu'on veut. Ainsi, il n'est pas possible de trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$.

Cela donne un produit scalaire très étrange : il contrevient au théorème de Riesz. Le théorème de Riesz dit que si E est de dimension finie, toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ s'écrit comme $\varphi = \langle x|\cdot\rangle$ pour un certain $x \in E$. Ici, on a un espace $\mathbb{R}[X]$ (de dimension infinie) et une forme linéaire $\phi : P \mapsto P(0)$ qui ne s'écrit pas comme "un produit scalaire contre quelque chose". On a donc montré que le théorème de Riesz n'est plus vrai en dimension infinie. Il existe des versions du théorème de Riesz en dimension infinie, mais elles sont bien plus compliquées.

Notons que tout argument montrant que trouver Q (tel que $\forall P,\ (P|Q) = P(0)$) est impossible doit utiliser une infinité de dimension : nos arguments doivent échouer en dimension finie. Dans la première méthode, on voit bien qu'on a besoin d'une infinité de dimension pour construire les P_n. Pour la deuxième méthode, c'est plus subtile : imaginons qu'on essaye de faire fonctionner cet argument dans F de dimension finie (on peut réfléchir comme si $F \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ pour un certain n, ce n'est pas forcément le cas, mais l'idée est la même) alors il est possible que $XQ \notin F$, ce qui fait échouer l'argument. C'est parce qu'on peut **toujours** prendre XQ dans $\mathbb{R}[X]$ que l'argument y fonctionne.

N.B. : On peut se poser la même question avec d'autres produits scalaires. Avec le produit scalaire terme à terme, $\langle P|Q\rangle = \sum_k p_k q_k$, prendre $Q = 1$ donne $\langle P|Q\rangle = P(0)$. Avec le produit scalaire intégral, $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 PQ$, ce n'est pas possible : toujours avec $M = \sup_{[0,1]} |Q|$, et $P_n = (1-X)^n$, on a $|\langle P_n|Q\rangle| \leq \int_0^1 M(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \to 0$ alors que $P_n(0) = 1$.

Exercise 2.419 (Question subsidiaire)**.** L'angle ne change pas en renormalisant les vecteurs, donc on peut choisir u_1, u_2, u_3 de norme 1.

Si u_1, u_2 et u_3 sont sur une même droite, i.e. $\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = 1$, alors $u_i = \pm u_j$ car les vecteurs sont unitaires. Donc l'angle entre u_i et u_j est 0 si $u_i = u_j$ ou π si $u_i = -u_j$. Mais si deux des angles valent π, alors le troisième vaut 0 : disons que $\widehat{u_1, u_2} = \widehat{u_1, u_3} = \pi$, alors $u_2 = -u_1 = u_3$, donc $\widehat{u_2, u_3} = 0$.

En dimension 2, les vecteurs unitaires correspondent à des points du cercle unité. il n'est pas possible de placer 3 points à strictement plus d'un tiers de cercle les uns des autres (un dessin fonctionne).

En dimension 3, considérons u_3', le projeté orthogonal de u_3 dans le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Complétons (u_1) et une base orthonormée (u_1, e_2) de $\mathcal{P}$. On a $u_3' = (u_3|u_1)u_1 + (u_3|e_2)e_2$. Donc $(u_3'|u_1) = (u_3|u_1)$. Mais par un raisonnement analogue : $(u_3'|u_2) = (u_3|u_2)$. Donc on a trois vecteurs u_1, u_2, u_3' en dimension 2 avec des angles de strictement plus que $\frac{2\pi}{3}$: ce n'est pas possible.

Finalement, comme on n'a que trois vecteurs, l'espace qu'ils engendre est de dimension au plus 3 : on a traité tous les cas.

On pourra aussi essayer de montrer qu'une famille $(u_1, ..., u_p)$ qui est obtuse, i.e. $(u_i|u_j) \leq 0$, vérifie toujours $p \leq n+1$ où $n = \dim \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$.

Retour à Khôlle 137 : Produit inhabituel de polynômes, Famille obtuse.

2.138 Correction Khôlle 138 : Sous-groupe linéaire fini, Matrice orthogonante

Retour à Khôlle 138 : Sous-groupe linéaire fini, Matrice orthogonante.

Exercise 2.420 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.421 (Problème principal)**.** Comme G est fini, la somme $(x|y) = \frac{1}{\#G} \sum_g \langle gx|gy\rangle$ est bien définie. Comme tous les $g \in G \subset GL(E)$ sont des applications linéaires, pour y fixé, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_g \langle gx|gy\rangle$ est linéaire (c'est un somme de fonctions linéaires). En outre, $(\cdot|\cdot)$ est symétrique car $\langle\cdot|\cdot\rangle$ l'est. Pour $x \in E$ et $g \in G$, on a $\langle gx|gx\rangle \geq 0$, donc $(x|x) \geq 0$ car c'est une somme de termes positifs. Si $(x|x) = 0$, alors tous les termes de la somme sont nuls car chaque terme est positif. Or $Id_E \in G$ car G est un groupe, donc $\langle x|x\rangle = 0$, puis $x = \vec{0}$.

On a bien montré que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

G est un groupe, donc pour montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}'(E)$, il suffit de montrer que $G \subseteq \mathcal{O}'(E)$, c'est-à-dire que tout $h \in G$ est orthogonal pour $(\cdot|\cdot)$, c'est-à-dire que $\forall h \in G, \forall x, y \in E,\ (hx|hy) = (x|y)$. Or $g \mapsto gh$ est un bijection de G (de bijection réciproque $g \mapsto gh^{-1}$), donc :

$$(hx|hy) = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \langle ghx|ghy\rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{f\in G} \langle fx|fy\rangle = (x|y)$$

Donc G est un sous-groupe (fini) de $\mathcal{O}'(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, orthonormée pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$, et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de E orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$. Soit φ l'endomorphisme de changement de base $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$. Alors φ^{-1} est le changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, donc $(g\varphi^{-1}e_i|g\varphi^{-1}e_j) = (ge'_i|ge'_j) = \delta_{i,j}$, puis $\left\langle \varphi g\varphi^{-1}e_i|\varphi g\varphi^{-1}e_j\right\rangle = (g\varphi^{-1}e_i|g\varphi^{-1}e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\varphi g\varphi^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Prenons pour finir $\psi = \varphi^{-1}$ et $H = \{\varphi g\varphi^{-1}\ ;\ g \in G\}$, alors H est un sous-groupe (fini) de $\mathcal{O}(E)$ et G lui est conjugué par ψ.

<u>**N.B. :**</u> Ce résultat est très important, parce qu'il permet d'équiper d'une structure puissante tous les sous-groupes finis de $GL(E)$, rien qu'en équipant E d'un produit scalaire (ce qui est souvent relativement facile à faire).

Exercise 2.422 (Question subsidiaire)**.** Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$0 = \langle X+Y|A(X+Y)\rangle = \langle X|AX\rangle + \langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle + \langle Y|AY\rangle = \langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle$$

Donc $\langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle = 0$, mais on sait que $\langle X|AY\rangle = \langle {}^tAX|Y\rangle$, d'où $\forall X, Y,\ \langle (A +^t A)X|Y\rangle = 0$, donc $\forall X, (A +^t A)X = \vec{0}$. Il s'ensuit que $A = -^tA$, c'est-à-dire que A est antisymétrique.

Réciproquement, si A est antisymétrique, alors pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle X|AX\rangle = \left\langle {}^tAX|X\right\rangle = -\langle AX|X\rangle$$

Donc $\forall X,\ \langle X|AX\rangle = 0$.

Retour à Khôlle 138 : Sous-groupe linéaire fini, Matrice orthogonante.

2.139 Correction Khôlle 139 : Énigme des 2 garçons, Inégalité via Tchebychev

Retour à Khôlle 139 : Énigme des 2 garçons, Inégalité via Tchebychev.

Exercise 2.423 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.424 (Problème principal)**.** On se place dans l'univers $\Omega = \{\text{Fille-fille}; \text{Garçon-fille}; \text{Fille-garçon}; \text{Garç}$ (par convention, on notera l'aîné avec une majuscule et le cadet avec une minuscule). Chaque cas est équiprobable dans la population française. On veut utiliser la formule de Bayes, en notant "$G \geq 1$" l'événement "Avoir au moins un garçon" :

$$\mathbb{P}_{G\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G \geq 1)}$$

En effet, notre ami mathématicien nous a dit qu'il avait "un garçon" (pas exactement un garçon, mais au moins un garçon), on ignore si c'est l'aîné ou le cadet. Dans 3 cas sur 4 de Ω, il y a un garçon, donc $\mathbb{P}(G \geq 1) = {}^3/_4$. Par équiprobabilité, on a aussi : $\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon}) = {}^1/_4$. Enfin, on a évidemment : $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1) = 1$. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{1}{3}$$

On peut d'ailleurs vérifier que dans le sous-univers de Ω où on sait qu'on a au moins un garçon, on a la loi de probabilité :

A	Fille-fille	Garçon-fille	Fille-garçon	Garçon-garçon	Total
$\mathbb{P}_{G\geq 1}(A)$	0	${}^1/_3$	${}^1/_3$	${}^1/_3$	1

Maintenant, on ne peut plus résonner dans le même univers car il faut prendre en compte les jours de la semaine, on fixe donc le nouvel univers $\Omega' = \{\text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; \text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Mardi}}; ...; \text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Fille}_{\text{Mardi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; ...; \text{Fille}_{\text{Dimanche}}-\text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Garçon}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; ...; \text{Garçon}_{\text{Dimanche}}-\text{garçon}_{\text{Dimanche}}\}$ (en notant évidement les jours de la semaine de naissance en indice). Il y a 4×49 évènement élémentaires équiprobables dans Ω'. On note "$G_{\text{Mardi}} \geq 1$" l'évènement "Avoir au moins un garçon né un mardi" et "Garçon-garçon" l'évènement "Avoir 2 garçons", qui correspond, dans notre nouvel univers, à la réunion d'évènements :

$$\text{Garçon-garçon} = \bigcup_{i,j\text{ : Jours de la semaine}} (\text{Garçon}_{\text{i}} - \text{garçon}_{\text{j}})$$

La probabilité de cet évènement est donc de $49 \times \frac{1}{4\times 49} = {}^1/_4$ (ce qui ne nous surprend pas).

On veut appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)}$$

Or $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)$ peut s'exprimer en comptant les cas : il y a 13 cas favorables sur 49 cas en tout. En effet, on a les cas $\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\textbf{pas Mardi}}$, soit 6 cas ; $\text{Garçon}_{\textbf{pas Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$, encore 6 cas ; et $\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$, 1 cas (qu'il ne faut pas compter deux fois). De la même manière, $\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}}) = \frac{7+7+13}{4\times 49}$ en comptant les cas favorables. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{13}{27}$$

On remarque un phénomène très intéressant : cette probabilité est très proche de $1/2$. La probabilité de $1/2$ correspond au cas où on aurait demandé "Est-ce que ton aîné est un garçon ?", par exemple, c'est-à-dire qu'on pose une question qui nous permet de rendre indépendant (la variable aléatoire désignant) le sexe de l'aîné de (la variable aléatoire désignant) celui du cadet. Dans ce cas, comme les évènements "Garçon" et "garçon" sont indépendants, on a bien :

$$\mathbb{P}_{\text{Garçon}}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}(\text{garçon}) = \frac{1}{2}$$

Dans notre cas du garçon né un mardi, l'information "né un mardi" ne rend pas les évènements indépendants, mais en imposant des précisions sur l'enfant qu'on considère, on diminue le nombre de cas favorables pour "$\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$" qui est le *défaut d'indépendance* entre "Garçon" et "garçon". Ainsi, pour une information complémentaire I (par exemple "être né un mardi" où "être roux" ou "aimer la vanille", etc), plus l'information est précise au sens où "$\text{Garçon}_I - \text{garçon}_I$" a peu de cas favorables, plus la réponse "Oui" à la question "As-tu un garçon tel que I" induit une probabilité que le deuxième enfant soit un garçon proche du cas d'indépendance $1/2$.

Pour plus de plus ample recherche sur la question, se renseigner sur le bayésianisme sur les excellentes chaînes Youtube de Hygiène Mentale et Science4All.

Exercise 2.425 (Question subsidiaire)**.** Si $X \sim \mathscr{B}(4n, 1/2)$, alors $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4n}{k}\frac{1}{2^{4n}}$, $\mathbb{E}X = 2n$ et $\mathbb{V}X = n$.

On peut appliquer l'inégalité de Tchebychev :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} &= 2^{4n}\mathbb{P}(X \in [n+1, 3n-1]) \\
&= 2^{4n}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < n) \\
&= 2^{4n}\left(1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq n)\right) \\
&\geq 2^{4n}\left(1 - \frac{\mathbb{V}X}{n^2}\right) \\
&\geq \frac{n-1}{n}2^{4n}
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 139 : Énigme des 2 garçons, Inégalité via Tchebychev.

2.140 Correction Khôlle 140 : Adversaire géométrique, Tchebychev optimal

Retour à Khôlle 140 : Adversaire géométrique, Tchebychev optimal.

Exercise 2.426 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.427 (Problème principal)**.** Notons $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. Posons X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de manche que vous devez faire avant de gagner et X_2 celle pour votre adversaire. X_1 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p_1)$ et X_2 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p_2)$. Les deux variables sont indépendantes. Rappelons que si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$. Cela peut se voir de deux manières : ou bien on constate que gagner après k manches est équivalent à échouer aux $k-1$ premières, ou bien on calcule $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} q^j q^{k-1} \frac{p}{1-q} = q^{k-1}$.

Dès lors, remporter la partie revient à effectuer moins d'essais que son adversaire, c'est-à-dire à ce que $X_1 < X_2$. Or on a, grâce à l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 \geq k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} q_2^k = p_1 q_2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^j = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}$$

Il y a deux manières de calculer la probabilité de l'égalité. Ou bien on calcule directement $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_k \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k)$, ou alors on sait qu'il y a égalité quand ni l'un ni l'autre n'a gagné, donc la probabilité d'égalité vaut :

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} p_2 q_2^{k-1} = p_1 p_2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k = \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$$

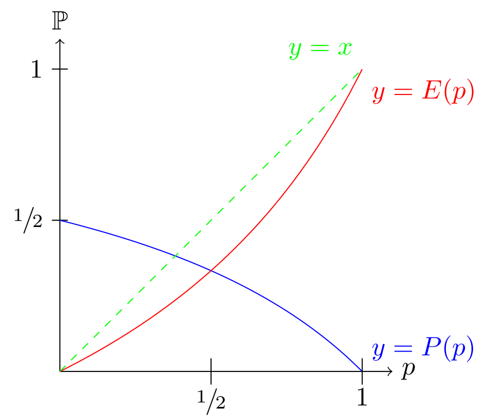
ou

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < X_2) - \mathbb{P}(X_1 > X_2) = 1 - \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2} - \frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$$

Si les deux joueurs sont de même niveau, notons $p = p_1 = p_2$. Alors, la probabilité d'égalité $E(p)$ devient $\frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$. Comme la probabilité que le premier joueur gagne est la même que celle que le deuxième joueur gagne, notons $P(p)$ cette probabilité. On a alors les probabilités totales (probabilité que le joueur 1 gagne + probabilité que le joueur 2 gagne + probabilité d'égalité = 1) : $P(p) + P(p) + E(p) = 1$. Donc :

$$P(p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{2-p}\right) = \frac{1-p}{2-p}$$

Le jeu est fortement égalitaire quand les joueurs sont tous les deux aussi mauvais ($P(p) \approx 1/2$ pour $p \approx 0$), et très propice à l'égalité quand les deux joueurs sont également fort ($E(p) = 1$ pour $p \approx 1$). Cette phrase est à relire plusieurs fois pour comprendre la différence entre les deux situations !



Taper "x*y/(1-(1-x)*(1-y))" sur Google ou WolframAlpha et régler le graphe sur $[0,1]$ pour les trois axes pour voir à quoi ressemble la probabilité d'égalité en général.

Exercise 2.428 (Question subsidiaire)**.** Fixons $S \subset [1,d]$. On a $Y_S \in \{-1,+1\}$. Plus encore, Y_S est symétrique car les $(X_i)_{i\in S}$ le sont sont : $\mathbb{P}(Y_S = -1) = \mathbb{P}(Y_S = +1) = 1/2$.

On remarque que si $S \cap T = \emptyset$, alors on Y_S et Y_T sont indépendantes car elles sont construites à partir de variables indépendantes (les variables utilisées pour Y_S n'ont rien a voir avec celle utilisées pour Y_T), c'est-à-dire pour tout $(\epsilon, \varepsilon) \in \{-1,+1\}^2$:

$$\mathbb{P}_{(Y_T=\epsilon)}(Y_S = \varepsilon) = \mathbb{P}_{\left(\prod_{j\in T} X_j = \epsilon\right)}\left(\prod_{i\in S} X_i = \varepsilon\right) = \mathbb{P}(Y_S = \varepsilon) = 1/2$$

Supposons qu'on ait prouvé que si $\# S \cap T = k$, alors Y_S et Y_T sont indépendant quelque soient $S, T \subset [1,d]$. Soient maintenant $S, T \subset [1,d]$ tels que $\# S \cap T = k+1$ et $j \in S \cap T$. On a $Y_S = X_j Y_{S\setminus\{j\}}$ et $Y_T = X_j Y_{T\setminus\{j\}}$, d'après la formule des probabilités totales et l'hypothèse de récurrence (i.e. $Y_{S\setminus\{j\}}$ et $Y_{T\setminus\{j\}}$ sont indépendantes), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_S = 1 \wedge Y_T = 1) &= \mathbb{P}(X_j = 1)\mathbb{P}_{X_j=1}(Y_{S\setminus\{j\}} = 1 \wedge Y_{T\setminus\{j\}} = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_j = -1)\mathbb{P}_{X_j=-1}(Y_{S\setminus\{j\}} = -1 \wedge Y_{T\setminus\{j\}} = -1) \\
&= 1/2\,\mathbb{P}(Y_{S\setminus\{j\}} = 1)\mathbb{P}(Y_{T\setminus\{j\}} = 1) \\
&\quad + 1/2\,\mathbb{P}(Y_{S\setminus\{j\}} = -1)\mathbb{P}(Y_{T\setminus\{j\}} = -1) \\
&= 1/8 + 1/8 = 1/4 \\
&= \mathbb{P}(Y_S = 1)\mathbb{P}(Y_T = 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, les $(Y_S)_{S\subset[1,d]}$ sont deux à deux indépendantes car le même calcul fonctionne pour montrer que $\mathbb{P}(Y_S = \epsilon \wedge Y_T = \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_S = \epsilon)\mathbb{P}(Y_T = \varepsilon)$ pour toutes les valeurs de $(\epsilon, \varepsilon) \in \{-1,+1\}^2$. On détermine : $\forall S, \mathbb{E}Y_S = 0, \mathbb{V}Y_S = 1$.

NB : La variable $Y_\emptyset$ est bien indépendante de toutes les autres.

Pour Z, on commence par remarquer que, d'après la formule du crible :

$$Z = \sum_{S \subset [1,d]} Y_S = \sum_{S \subset [1,d]} \prod_{i \in S} X_i = \prod_{i \in [1,d]} (1 + X_i)$$

De fait, à partir du moment où l'un des X_i vaut -1, on a $Z = 0$, et inversement, si tous les X_i valent $+1$, alors $Z = 2^d$, soit avec probabilité $\mathbb{P}(\forall i, X_i = +1) = \prod_i \mathbb{P}(X_i = +1) = (1/2)^d$. On calcule la loi de Z :

x	-1	$+1$	0	2^d	$\mathbb{E}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Y_\emptyset = x)$	0	1			1	0
$\mathbb{P}(Y_S = x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Z = x)$			$1 - 1/2^d$	$1/2^d$	1	$2^d - 1$

On prendra le temps de vérifier qu'on a : $\mathbb{E}Z = \sum_S \mathbb{E}Y_S$ et $\mathbb{V}Z = \sum_S \mathbb{V}Y_S$.

Finalement, on a $\mathbb{P}(Z \geq 2^d) = 1/2^d$. On peut aussi appliquer la formule de Tchebychev :

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{S \subset [1,d]} (Y_S - \mathbb{E}Y_S)\right| \geq t\right) \leq \frac{\sum_S \mathbb{V}Y_S}{t^2} = \frac{2^d}{t^2}$$

Donc pour $t = 2^d$, on a égalité : la formule de Tchebychev est optimale si on suppose que les variables sont **deux à deux indépendantes**. Les $(Y_S)_S$ ne sont pas indépendantes au sens fort sans quoi $\mathbb{P}\left(Y_{\{1,2\}} = -1 \wedge Y_{\{1\}} = 1 \wedge Y_{\{2\}} = 1\right) = 1/8$, alors que $\mathbb{P}\left(Y_{\{1,2\}} = -1 \wedge Y_{\{1\}} = 1 \wedge Y_{\{2\}} = 1\right) = 0$ car l'évènement décrit est impossible. Si on dispose de variables indépendantes (au sens fort), alors il existe des inégalité de concentration plus puissantes comme l'inégalité de Chernoff.

Retour à Khôlle 140 : Adversaire géométrique, Tchebychev optimal.

2.141 Correction Khôlle 141 : Match de tennis, Inégalité de Hoeffding

Retour à Khôlle 141 : Match de tennis, Inégalité de Hoeffding.

Exercise 2.429 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.430 (Problème principal)**.** Notons les évènements :

- E_{40} : "égalité à 40-40"
- F : "Federer gagne le jeu"
- F_1 : "Federer gagne le prochain point"

- F_2 : "Federer gagne le second prochain point"
- N_1 : "Nadal gagne le prochain point"
- N_2 : "Nadal gagne le second prochain point"

Après deux points, ou bien l'un des joueurs à gagné le jeu, ou bien il y a de nouveau égalité à 40-40.

On utilise donc la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)\mathbb{P}(N_1) \\ &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)p + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap F_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|F_1) \\ &= 1 \times p + \mathbb{P}(F|E)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap N_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|N_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|N_1) \\ &= \mathbb{P}(F|E)p + 0 \times q\end{aligned}$$

On a donc l'équation d'inconnue $x = \mathbb{P}(F|E)$:

$$x = p(p + xq) + q(xp)$$

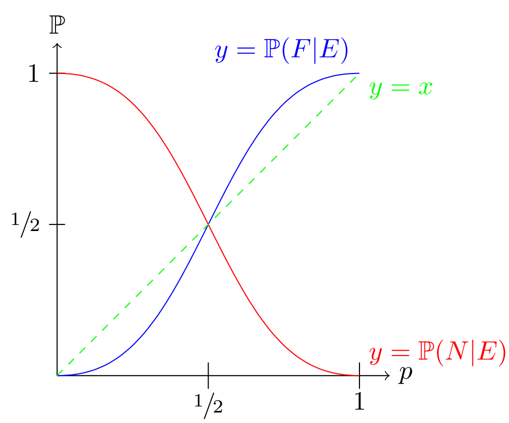
Donc, finalement, en utilisant $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1^2 = 1$:

$$\mathbb{P}(F|E) = x = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

La probabilité pour Nadal de gagner est donc :

$$\mathbb{P}(N|E) = 1 - x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}$$

On remarque, en traçant les probabilité l'une contre l'autre en fonction de p que la situation d'égalité exagère légèrement l'avantage du joueur le plus fort (la courbe bleue est au-dessus de la bissectrice verte).



Exercise 2.431 (Question subsidiaire)**.** Comme l'exponentielle est une fonction croissante, les inégalités $tS_n \geq \lambda t$ et $e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}$ sont équivalentes. Il s'ensuit qu'on peut appliquer l'inégalité de Markov car la variable e^{tS_n} est positive :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) &= \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}\right) \\
&\leq \frac{1}{e^{\lambda t}} \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \\
&\leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) \\
&\leq e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) \qquad \text{par indépendance} \\
&\leq e^{-\lambda t} \left(e^{\frac{t^2 M^2}{2}}\right)^n \qquad \text{par le lemme de Hoeffding} \\
&\leq \exp\left(-\lambda t + \frac{nM^2}{2} t^2\right)
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t > 0$, on peut optimiser en t pour trouver la meilleure borne. $t = \frac{\lambda}{nM^2} > 0$ est optimal et donne l'inégalité souhaitée pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2nM^2}\right)$$

N.B. : Cette inégalité est vraie dans une plus large mesure : si $\mathbb{P}(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$, alors $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$ et $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$. Cette inégalité est beaucoup beaucoup plus puissante que les inégalités de Markov ou Tchebychev ! C'est l'une des raisons pour lesquelles on aime bien décomposer des variables aléatoires en sommes de variables élémentaires.

Retour à Khôlle 141 : Match de tennis, Inégalité de Hoeffding.