Khôlles MPSI2 2019-2020

POULLOT Germain

Septembre 2019 - Mars 2020

Résumé

Attention ! Les khôlles présentées ici n'ont bien évidement pas vocation à remplacer les excellents exercices vus en cours. Si vous avez du temps et cherchez des exercices en plus, alors vous pouvez lire ces sujets. Les corrections sont disponibles dans la deuxième partie. Parfois, un exercice est entièrement corrigé, parfois partiellement, et parfois encore, vous serez juste redirigés vers le cours, une vidéo ou un site. Certaines khôlles sont longues, d'autres très courtes ; certaines faciles, d'autres particulièrement ardues : apprendre à détecter ce que vous savez faire et ce qui est difficile est aussi un bon exercice !

Si vous avez une question quelconque ou une remarque, vous pouvez me contacter : germain.poullot@polytechnique.edu (n'oubliez pas de signer votre mail, s'il-vous-plaît).

Les khôlles des autres classes et des autres années sont disponibles sur ma page web : https://webusers.imj-prg.fr/germain.poullot/Kholles

Bonne chance !

Table des matières

1 Sujets de Khôlles

1.1 Programme 1 : Trigonométrie et Logique

1.1.1 Khôlle 1 : Trigonométrie

Exercise 1.1 (Question de cours)**.** Tracez un cercle trigonométrique, rappelez les principales formules et surtout énoncez (avec une démonstration par le dessin) 2 formules permettant d'échanger cos et sin.

Exercise 1.2 (Problème principal)**.** Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Exercise 1.3 (Question subsidiaire)**.** Montrez que : $\sin^2 + \cos^2 = 1$ et $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Solution ici : Section 2.1.

1.1.2 Khôlle 2 : Logique

Exercise 1.4 (Question de cours)**.** Donnez les tables de vérité des opérateurs logiques $\wedge$ (*et*), $\vee$ (*ou*), $\neg$ (*non*), $\Rightarrow$ (*implique*), $\Leftrightarrow$ (*équivalent*).

Definition 1.1 (Table de vérité)**.** Page Wikipédia correspondante

Exercise 1.5 (Problème principal)**.** Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$. *Il s'agit du principe de disjonction.*

Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$. *Il s'agit de la loi de Pierce.*

Exercise 1.6 (Question subsidiaire)**.** Donnez la traduction du principe de disjonction avec des phrases en français. Remplacez les dernières implications par des équivalences. Re-démontrez la loi de Pierce avec des équivalences.

Solution ici : Section 2.2.

1.1.3 Khôlle 3 : Logique

Exercise 1.7 (Question de cours)**.** Énoncez (formellement) le théorème de Thalès, sa réciproque et sa contraposée. Démontrez-en la vérité ou la fausseté sur des exemples.

Exercise 1.8 (Problème principal)**.** Prouvez la proposition :
P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Indice : On peut raisonner par contraposée.

Exercise 1.9 (Question subsidiaire)**.** Partagez un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, 7, 8, 9, 10 et 11.

Montrez qu'on peut partager un carré en n carrés pour $n \geq 6$ et conclure.
(Comment compter le nombre de manière de séparer un carré en n carrés ?)

Solution ici : Section 2.3.

1.1.4 Khôlle 4 : Trigonométrie

Exercise 1.10 (Question de cours)**.** Calculer $\cos\frac{\pi}{12}; \sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{8}; \sin\frac{\pi}{8}$.

Exercise 1.11 (Problème principal)**.** Montrez que

$$\sum_{\epsilon_i\in\{-1;+1\}} \cos(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\epsilon_i\in\{-1;+1\}} \sin(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n)$.

Exercise 1.12 (Question subsidiaire)**.** Calculez :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Solution ici : Section 2.4.

1.1.5 Khôlle 5 : Trigonométrie

Exercise 1.13 (Question de cours)**.** Calculer (on doit trouver $\frac{3}{2}$) :

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$$

Exercise 1.14 (Problème principal)**.** Résoudre l'équation :

$$2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{4\sin^2 x-3} = 20$$

(On doit trouver $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.)

Exercise 1.15 (Question subsidiaire)**.** Résoudre l'équation : $\cos 3x = \sin 2x$. Grâce à la formule $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, en déduire les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{10}\}$.

Solution ici : Section 2.5.

1.1.6 Khôlle 6 : Logique

Exercise 1.16 (Question de cours)**.** Soit p un prédicat à 2 variables. Que pensez-vous de l'assertion $(\forall x, \exists y, p(x,y)) \Rightarrow \exists y, p(y,y)$?

Il faudra penser à interpréter l'assertion en français, par exemple avec les prédicats "x est le père de y" et "y est le père de x".

Exercise 1.17 (Problème principal)**.** Soit $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que H_n n'est jamais entier.

Indice : On pourra écrire H_n comme un quotient et s'intéresser à la parité du numérateur et du dénominateur.

Exercise 1.18 (Question subsidiaire)**.** Démontrer que tout nombre naturel est divisible par un nombre premier.

Solution ici : Section 2.6.

1.2 Programme 2 : Fonctions, études, puissances, exp, ln

1.2.1 Khôlle 7 : Étude de fonctions, ln

Exercise 1.19 (Question de cours)**.** Énoncez le théorème de la bijection. Donnez un exemple dans le cas où f n'est pas continue et n'est pas une bijection.

Exercise 1.20 (Problème principal)**.** Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (ensemble de définition, graphe, etc).

En déduire la résolution de l'équation $a^b = b^a$ ou a et b sont entiers naturels.

Exercise 1.21 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Solution ici : Section 2.7.

1.2.2 Khôlle 8 : Puissances, exp

Exercise 1.22 (Question de cours)**.** Énoncez les théorèmes de croissances comparées. En déduire $\lim_{+\infty} \frac{\alpha^x}{(\ln x)^\beta}$.

Exercise 1.23 (Problème principal)**.** Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercise 1.24 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.8.

1.2.3 Khôlle 9 : Étude de fonction

Exercise 1.25 (Question de cours)**.** Rappelez la formule de la dérivée d'une composée et la définition du nombre α^x. En déduire la dérivée de la fonction $x \mapsto \alpha^x$.

Exercise 1.26 (Problème principal)**.** Faites l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Déterminez graphiquement et numériquement $Q(x) := P(x - \frac{b}{3a})$ (on doit retrouver les polynômes de la forme $X^3 + pX + q$, qui sont "centrés".)

Construisez un discriminant pour les polynômes $X^3 + pX + q$.

Exercise 1.27 (Question subsidiaire)**.** Déterminez : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercise 1.28 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifiez $\sinh^2 x \cos^2 x + \cosh^2 x \sin^2 x$.

Solution ici : Section 2.9.

1.2.4 Khôlle 10 : Étude de fonction, ln

Exercise 1.29 (Question de cours)**.** Montrez grâce aux dérivée que si $\ln f$ est d'une certaine monotonie, alors f est de cette même monotonie.

Exercise 1.30 (Problème principal)**.** Tracez le graphe de $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercise 1.31 (Question subsidiaire)**.** Résoudre : $\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10) = 0$.

Solution ici : Section 2.10.

1.2.5 Khôlle 11 : Trigonométrie et étude de fonctions

Exercise 1.32 (Question de cours)**.** Soit f une fonction à valeur réelle. Exprimez f^+ et f^- en fonction de $|f|$ et f.

Exercise 1.33 (Problème principal)**.** Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercise 1.34 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercise 1.35 (Question subsidiaire)**.** Généralisez : soit P et Q deux fonctions polynomiales (réelles), dans quels cas la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{P}{Q}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.11.

1.2.6 Khôlle 12 : Étude de fonctions, ln

Exercise 1.36 (Question de cours)**.** Soit f et g deux fonctions monotones. Parlez-moi de leur somme, leur produit et leur composée.

Exercise 1.37 (Problème principal)**.** Montrez que $\forall x \in]0;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$. (On demandera aussi le graphe de la fonction $f : x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Étudiez aussi les cas limites ($x \to 0$ et $x \to 1$).

Exercise 1.38 (Question subsidiaire)**.** Résoudre en fonction de a, b et c des réels, l'équation $a\cosh x + b\sinh x = c$.

Solution ici : Section 2.12.

1.3 Programme 3 : Ensembles, analyse, etc.

1.3.1 Khôlle 13 : Ensembles

Exercise 1.39 (Question de cours)**.** En théorie des ensembles, rappelez les définitions et les propriétés de l'union, de l'intersection et du "privé de".

Exercise 1.40 (Problème principal)**.** On appelle *différence symétrique* l'opération suivante, notée Δ, entre deux ensembles A et B :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

Montrez que la différence symétrique est commutative et associative. **Pensez à dessiner !**

Dispose-t-elle d'un élément neutre ? D'inverses pour certains éléments ?

(Est-ce que la différence symétrique se distribue sur l'union ? l'intersection ?)

Exercise 1.41 (Question subsidiaire)**.** Résoudre en fonction de a, b et c des réels, l'équation $a \cosh x + b \sinh x = c$.

Solution ici : Section 2.13.

1.3.2 Khôlle 14 : Binôme de Newton

Exercise 1.42 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la formule du binôme de Newton (attention à l'hypothèse a et b commutent !).

Exercise 1.43 (Problème principal)**.** Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Exercise 1.44 (Question subsidiaire)**.** Quel est le plus grand terme dans le développement de $(a+b)^n$ où $a, b \in \mathbb{R}_*^+$?

Exercise 1.45 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.14.

1.3.3 Khôlle 15 : Fonctions hyperboliques, sommes

Exercise 1.46 (Question de cours)**.** Donnez les définitions et graphes de sinh, cosh et tanh.

Exercise 1.47 (Problème principal)**.** Résoudre $\sum_k \sinh(2 + kx) = 0$

Exercise 1.48 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i \in [|1;n|]} \in \mathbb{R}_+^*, \sum_i a_i \times \sum_i \frac{1}{a_i} \geq n^2$

Exercise 1.49 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\forall n \geq 3, \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$.

Solution ici : Section 2.15.

1.3.4 Khôlle 16 : Ensembles, polynôme de degré 3

Exercise 1.50 (Question de cours)**.** Soient E et F des ensembles. Donner la définition de $\mathcal{P}(E)$, et montrez que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.

Exercise 1.51 (Problème principal)**.** Faites l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Déterminez graphiquement et numériquement $Q(x) := P(x - \frac{b}{3a})$ (on doit retrouver les polynômes de la forme $X^3 + pX + q$, qui sont "centrés".)

Construisez un discriminant pour les polynômes $X^3 + pX + q$.

Exercise 1.52 (Question subsidiaire)**.** Justifier de l'existence et simplifiez : $\frac{\cosh(\ln x)+\sinh(\ln x)}{x}$ $(= 1)$; et : $\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ $(= 0)$.

Solution ici : Section 2.16.

1.3.5 Khôlle 17 : Relations binaires, ln

Exercise 1.53 (Question de cours)**.** Rappelez ce qu'est une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Montrez que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur les ensembles. Est-ce une relation partielle ? Totale ?

Montrez que l'application $X \subset E \mapsto \overline{X}$ est décroissante.

Exercise 1.54 (Problème principal)**.** Résoudre $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leq \ln 2$.

Exercise 1.55 (Question subsidiaire)**.** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\ln_x y + 2\ln_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

Exercise 1.56 (Question subsidiaire)**.** Résoudre : $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$

Solution ici : Section 2.17.

1.3.6 Khôlle 18 : Ensembles

Exercise 1.57 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'un produit cartésien et montrez que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(Pourquoi ne dit-on pas "le produit cartésien est distributif sur l'union" ?)

Exercise 1.58 (Problème principal)**.** Soient E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E indexées par un ensemble I. Montrez que :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)} \left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\in I\setminus X} B_i \right)$$

Exercise 1.59 (Question subsidiaire)**.** On suppose que $x = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$.

Montrez que $\tanh\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$; $\tanh x = \sin y$ et $\cosh x = \frac{1}{\cos y}$.

Solution ici : Section 2.18.

1.4 Programme 4 : Ensemble, Trigonométrie réciproque

1.4.1 Khôlle 19 : Trigonométrie réciproque, Dérivation

Exercise 1.60 (Question de cours)**.** Donnez le théorème de dérivabilité de la réciproque.

Exercise 1.61 (Problème principal)**.** (Montrez que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$.)

Montrez que $\arctan(e^x) - \arctan(\tanh \frac{x}{2})$ est une constante ($= \frac{\pi}{4}$).

Exercise 1.62 (Question subsidiaire)**.** Soit une fonction f dérivable et un réel b. Comment calculer $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k f'(kx+b)$?

Calculez $S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sinh(kx)$.

Solution ici : Section 2.19.

1.4.2 Khôlle 20 : Dérivation, Trigonométrie réciproque

Exercise 1.63 (Question de cours)**.** Démontrez la formule du binôme.

Exercise 1.64 (Problème principal)**.** Montrez : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercise 1.65 (Question subsidiaire)**.** $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} (= \frac{\pi}{4})$.

Exercise 1.66 (Question subsidiaire)**.** Quel est le plus grand terme dans le développement de $(a+b)^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.20.

1.4.3 Khôlle 21 : Relation d'ordre

Exercise 1.67 (Question de cours)**.** Tracez $\arccos\cos(x)$ et $\arcsin\sin(x)$.

Exercise 1.68 (Problème principal)**.** Une relation $\mathcal{R}$ est un *pré-ordre* si elle est réflexive et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ un pré-ordre et $\mathcal{T}$ la relation : $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x)$. Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

Soit X et Y deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{T}$. On définit la relation $X\mathcal{S}Y$ par $\exists x \in X, \exists y \in Y, x\mathcal{R}y$. Montrez que $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y, x\mathcal{R}y$. Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalences modulo $\mathcal{T}$.

Exercise 1.69 (Question subsidiaire)**.** Montrez que la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est un pré-ordre, précisez la relation d'équivalence et la relation d'ordre qui s'en déduisent.

Solution ici : Section 2.21.

1.4.4 Khôlle 22 : Trigonométrie réciproque, Sommes

Exercise 1.70 (Question de cours)**.** Donnez le théorème de dérivabilité des fonctions composées.

Exercise 1.71 (Problème principal)**.** Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{2}{k^2}$. Calculez $\lim_{+\infty} u_n$.

($u_n = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0 \to \frac{3\pi}{4}$. Il faut retrouver la formule d'addition des arctan.)

Exercise 1.72 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.22.

1.4.5 Khôlle 23 : Sommes, Relations binaires

Exercise 1.73 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de partition par relation d'équivalence.

Exercise 1.74 (Problème principal)**.** Calculez la limite ($n \to +\infty$) de (ça fait -1) :

$$u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \left(5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4\right)$$

On commencera par trouver $\sum_k k^4$ en regardant la somme télescopique $\sum_k (P(k+1) - P(k))$ pour P un polynôme de degré 5 tel que $P(X+1) - P(X) = X^4$.

Exercise 1.75 (Question subsidiaire)**.** Étudiez les relations suivantes : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$; $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q$ sur $\mathbb{R} \backslash]-1; 1[$.

Solution ici : Section 2.23.

1.4.6 Khôlle 24 : Ensembles, Trigonométrie réciproque

Exercise 1.76 (Question de cours)**.** Donnez les graphes des fonctions arccos, arcsin et arctan.

Exercise 1.77 (Problème principal)**.** Soit E un ensemble. On définit la *fonction indicatrice* de $A \subset E$, notée $\mathbb{1}_A$, par $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $= 0$ sinon.

Soient $A, B \subset E$. Exprimez, en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$: $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \backslash B}$ et $\mathbb{1}_{A \Delta B}$.

Démontrez que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ si et seulement si $A = B$.

Démontrez ainsi que : $\cap$ et distributif sur Δ ; que Δ est associatif, etc.

Exercise 1.78 (Question subsidiaire)**.** Résoudre $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Solution ici : Section 2.24.

1.5 Programme 5 : Ensembles, Applications, Relations

1.5.1 Khôlle 25 : Applications, Relations

Exercise 1.79 (Question de cours)**.** Rappelez la définition de injective, surjective, bijective et montrez qu'une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercise 1.80 (Problème principal)**.** Soit $f : E \to E$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\hat{f} \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est surjective si et seulement si $f \circ \hat{f} = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 1.81 (Question subsidiaire)**.** Étudiez les relations suivantes : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$; $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q$ sur $\mathbb{R}\backslash]-1; 1[$.

Solution ici : Section 2.25.

1.5.2 Khôlle 26 : Applications, Relations

Exercise 1.82 (Question de cours)**.** Donnez et justifiez les graphe de arctan et tan puis de $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.

Exercise 1.83 (Problème principal)**.** On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ par $f(x, y) = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$. Montrez que f est bien définie et que c'est une bijection.

En déduire que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout k, puis que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercise 1.84 (Question subsidiaire)**.** Soit $\mathcal{R}$ la relation suivante sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et dénombrez ses classes d'équivalence.

Solution ici : Section 2.26.

1.5.3 Khôlle 27 : Applications, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 1.85 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la formule du binôme de Newton.

Exercise 1.86 (Problème principal)**.** Soit $f : E \to E$. On note $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n fois), avec $f^0 = Id_E$. Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_n A_n$.

Montrez que $f(B) \subset B$, puis que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) stable par f et contenant A.

Exercise 1.87 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Solution ici : Section 2.27.

1.5.4 Khôlle 28 : Applications, Binôme

Exercise 1.88 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de partition par relation d'équivalence.

Exercise 1.89 (Problème principal)**.** Soient trois applications f, g et h telles que les compositions $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ soient définies, que 2 d'entre elles soient injectives et la troisième surjective. Montrez que f, g et h sont bijectives.

Exercise 1.90 (Question subsidiaire)**.** Quel est le plus grand terme dans le développement de $(a+b)^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.28.

1.5.5 Khôlle 29 : Applications

Exercise 1.91 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'une image directe et d'une image réciproque.

Exercise 1.92 (Problème principal)**.** [Théorème de Cantor-Berstein]. Soient E et F deux ensembles munies d'injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On veut montrez qu'il existe une bijection entre E et F. Démontrez le théorème pour E **ou** F fini(s). On note $g^{-1}(x)$ l'antécédant de x par g (idem pour $f^{-1}(y)$). On regarde : x, $g^{-1}(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(x))$, $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$,... On note A la partie de E contenant tous les x pour lesquels cette suite est finie et a son dernier élément dans E. On pose $h : E \to F$, montrez que c'est une bijection :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \in A \\ g^{-1}(x) \ si \ x \notin A \end{cases}$$

Exercise 1.93 (Question subsidiaire)**.** Montrez que l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ induit une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$.

Solution ici : Section 2.29.

1.5.6 Khôlle 30 : Applications, Ensembles ordonnés

Exercise 1.94 (Question de cours)**.** Donnez la définition d'une borne inférieure et d'une borne supérieure (ainsi que des exemples).

Exercise 1.95 (Problème principal)**.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie admet une borne inférieure et une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ croissante. On pose $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$. Montrez que $X \neq \emptyset$. Montrez que X est stable par f. Soit $a = \sup X$. Montrez que $a \in X$ et que a est un point fixe de f. Donnez un exemple de situation.

Exercise 1.96 (Question subsidiaire)**.** Soit E un ensemble. Montrez qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. En regardant $\{x \in E; x \notin f(x)\}$, montrez qu'une telle injection ne saurait être une bijection. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Solution ici : Section 2.30.

1.6 Programme 6 : Dérivation & Intégration

1.6.1 Khôlle 31 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.97 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de dérivabilité de la composée.

Exercise 1.98 (Problème principal)**.** Calculez les intégrales suivantes :

- $\int_{-1}^{1} x|x|\mathrm{d}x$ (on doit trouver 0).
- $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$ (on doit trouver $7/3$).
- Calculez $f(x) = \int_0^1 \max(x, t)\mathrm{d}t$. Représentez f.

Exercise 1.99 (Question subsidiaire)**.** Tracez la primitive de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ qui s'annule en 0 et donnez une formule explicite.

Solution ici : Section 2.31.

1.6.2 Khôlle 32 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.100 (Question de cours)**.** Donnez et "démontrez" la formule d'intégration par partie.

Exercise 1.101 (Problème principal)**.** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

Calculez $I_0 (= \pi/4)$ et $I_1 (= \ln 2/2)$ puis trouvez une récurrence d'ordre 2 pour I_n. En déduire I_n et sa limite.

En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (c'est $\ln 2$) et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (c'est $\frac{\pi}{4}$).

Exercise 1.102 (Question subsidiaire)**.** Montrez que :

$$\left(\forall (\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 0\right) \Rightarrow (\forall x \in [a, b], f(x) = 0)$$

Solution ici : Section 2.32.

1.6.3 Khôlle 33 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.103 (Question de cours)**.** Énoncez et montrez le principe de changement de variables.

Exercise 1.104 (Problème principal)**.** Déterminez $I_{p,q}(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p (t-\beta)^q \mathrm{d}t \left(= \frac{(-1)^q (\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}\right)$.

Exercise 1.105 (Question subsidiaire)**.** Soit $\varphi(t) = \frac{\sinh t}{t}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = 1$. Soit $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrez que f est bien définie, donnez sa parité. Montrez qu'elle est dérivable et calculez sa dérivée. Dressez son tableau de variations.

Solution ici : Section 2.33.

1.6.4 Khôlle 34 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.106 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de dérivabilité de la réciproque.

Exercise 1.107 (Problème principal)**.** Déterminez $\int \ln^n \left(= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}\right)$.

Exercise 1.108 (Question subsidiaire)**.** [Règle de Biot] Observer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \; \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t\right) \; \mathrm{d}t$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\mathrm{d}t (= \frac{\pi}{8} \ln 2)$.

Solution ici : Section 2.34.

1.6.5 Khôlle 35 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.109 (Question de cours)**.** Énoncez le théorème d'existence de primitive et montrez que deux primitives égales en point sont égales.

Exercise 1.110 (Problème principal)**.** Déterminez $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ $(I = J = \frac{\pi}{4})$. En déduire la valeur de $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} (= \frac{\pi}{4})$.

Exercise 1.111 (Question subsidiaire)**.** Donnez la primitive qui s'annule en 0 de :

- $x \mapsto \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x$ (on trouve $x \mapsto e^{x \ln x - x} - 1$)
- $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ (on trouve $x \mapsto \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right) + Cst$)
- $x \mapsto \frac{\sin^2(x/2)}{(x - \sin x)^3}$ (on trouve $x \mapsto \frac{-1}{4(x - \sin x)^2} + Cst$)

Solution ici : Section 2.35.

1.6.6 Khôlle 36 : Calculs d'intégrales & primitives

Exercise 1.112 (Question de cours)**.** Donnez et montrez l'inégalité triangulaire intégrale.

Exercise 1.113 (Problème principal)**.** Soit f une fonction définie sur $[0, a]$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ continue strictement croissante, dérivable et dont la dérivée et continue avec $f(0) = 0$. On note f^{-1} sa réciproque.

Montrez que, pour $x \in [0, a]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$. **Faites un dessin !**

Soit u, v tels que $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq f(a)$. Montrez que $uv \leq \int_0^u f + \int_0^v f^{-1}$

Exercise 1.114 (Question subsidiaire)**.** Montrez l'inégalité de Young : $\forall (p, q) \in]1, +\infty[, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

Solution ici : Section 2.36.

1.7 Programme 7 : Nombres complexes 1

1.7.1 Khôlle 37 : Géométrie complexe

Exercise 1.115 (Question de cours)**.** Expliquez en quoi "la conjugaison complexe est un automorphisme de corps". Donnez son ensemble de points fixes.

Exercise 1.116 (Problème principal)**.** [Identité de la médiane] Montrez que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interprétez géométriquement. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$, montrez que $|z| + |z'| = \left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|$

Exercise 1.117 (Question subsidiaire)**.** Trouvez les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Solution ici : Section 2.37.

1.7.2 Khôlle 38 : Équation dans les complexes

Exercise 1.118 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, ainsi que ses corollaires.

Exercise 1.119 (Problème principal)**.** Soit (E) l'équation $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Montrez que les solutions de (E) sont des imaginaires purs. Montrez que si z est solution de (E) alors $-z$ aussi. Résoudre (E).

Exercise 1.120 (Question subsidiaire)**.** Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Solution ici : Section 2.38.

1.7.3 Khôlle 39 : Complexes et trigonométrie

Exercise 1.121 (Question de cours)**.** Expliquez comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il pour un polynôme de degré quelconque ?

Exercise 1.122 (Problème principal)**.** Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminez les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercise 1.123 (Question subsidiaire)**.** On pose la relation binaire sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$: $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R}, z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z\sin\theta}$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution ici : Section 2.39.

1.7.4 Khôlle 40 : Application dans les complexes

Exercise 1.124 (Question de cours)**.** Expliquez ce qu'est l'affixe d'un nombre complexe (bijection $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) et exprimez $\Re(z)$ et $\Im(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

Exercise 1.125 (Problème principal)**.** Montrez que (et que pensez-vous de la réciproque ?) :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}, (|z_1| = |z_2| = 1 \text{ et } |2 + z_1 z_2| = 1) \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

Exercise 1.126 (Question subsidiaire)**.** (ESSIM '93) On définit sinh, cosh et tanh sur $\mathbb{C}$ par les mêmes formules que sur $\mathbb{R}$. Donnez l'ensemble de définition de tanh. Résoudre $\tanh z = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\tanh z| < 1$. En déduire que tanh réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Solution ici : Section 2.40.

1.7.5 Khôlle 41 : Polynôme complexe

Exercise 1.127 (Question de cours)**.** Expliquez ce qu'est l'argument d'un nombre complexe (forme exponentielle, bijection $\mathbb{R} \times [0, \pi/2[\simeq \mathbb{C}$, morphisme...). En déduire une CNS pour dire que 3 points sont alignés.

Exercise 1.128 (Problème principal)**.** Montrez que les solutions de $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} - nz^n = 0$ sont de module ≤ 1. Y a-t-il des solutions de module 1 ?

Exercise 1.129 (Question subsidiaire)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{C}$. Donnez une CNS pour que les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$ soient toutes réelles.

Solution ici : Section 2.41.

1.7.6 Khôlle 42 : Équation du second degré

Exercise 1.130 (Question de cours)**.** Qu'est-ce que le "groupe des unités" et pourquoi "groupe" ? Parlez de $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Exercise 1.131 (Problème principal)**.** Résoudre le système $x + y = 1 + i$ et $xy = 2 - i$.

Exercise 1.132 (Question subsidiaire)**.** Déterminez les valeurs de $f : z \mapsto \frac{z+|z|}{2}$.

Solution ici : Section 2.42.

1.8 Programme 8 : Nombre complexes 2

1.8.1 Khôlle 43 : Complexes, Binôme

Exercise 1.133 (Question de cours)**.** Expliquez ce qu'est une *similitude directe*.

Exercise 1.134 (Problème principal)**.** Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

Exercise 1.135 (Question subsidiaire)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$$

Solution ici : Section 2.43.

1.8.2 Khôlle 44 : Complexe, Géométrie plane

Exercise 1.136 (Question de cours)**.** Linéarisez $\cos^4 \sin^6$.

Exercise 1.137 (Problème principal)**.** [Théorème de Napoléon] Soit un triangle ABC quelconque. Soient A', B' et C' trois points tels que CBA', ACB' et BAC' soient équilatéraux (extérieurs à ABC). Soient D, E et F les centres de CBA', ACB' et BAC'. Montrez que DEF est un triangle équilatéral. Montrez que le centre de DEF est aussi celui de ABC. Faire de même en construisant les triangles équilatéraux intérieurs (noté $AB\tilde{C}$, $BC\tilde{A}$ et $CA\tilde{B}$ de centres $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$), puis comparer les aires de DEF et de $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$.

Exercise 1.138 (Question subsidiaire)**.** Décomposez le polynôme $z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1$ en produit de 3 polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercise 1.139 (Question subsidiaire)**.** Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Solution ici : Section 2.44.

1.8.3 Khôlle 45 : Exponentielle complexe

Exercise 1.140 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez les formules d'Euler et de Moivre.

Exercise 1.141 (Problème principal)**.** (ESSIM '93) On définit sinh, cosh et tanh sur $\mathbb{C}$ par les mêmes formules que sur $\mathbb{R}$. Donnez l'ensemble de définition de tanh. Résoudre $\tanh z = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\tanh z| < 1$. En déduire que tanh réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Exercise 1.142 (Question subsidiaire)**.** Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $w = \frac{1+z}{1-z}$. Quel est l'ensemble des points d'affixe z lorsque $|w| = 1$? Lorsque $|w| = 2$? $w \in \mathbb{R}$? $w \in i\mathbb{R}$?

Solution ici : Section 2.45.

1.8.4 Khôlle 46 : Complexes, Polynômes

Exercise 1.143 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'exponentielle complexe.

Exercise 1.144 (Problème principal)**.** On définit la suite $(z_n)_n$ par récurrence : $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ fixés et $z_{n+1} - z_n = \alpha(z_n - z_{n-1})$. Déterminez une CNS sur $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $(z_n)_n$ soit périodique.

Exercise 1.145 (Question subsidiaire)**.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{C}$. Donnez une CNS pour que les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$ soient toutes réelles.

Solution ici : Section 2.46.

1.8.5 Khôlle 47 : Complexes, Géométrie plane

Exercise 1.146 (Question de cours)**.** Calculez la somme et le produit des racines n-ième de $a \in \mathbb{C}$.

Exercise 1.147 (Problème principal)**.** [Problème de Thébault (n°2)] Soit un carré $ABCD$. Soient E et F tels que BCE et CDF soient équilatéraux (extérieurs au carré). Montrez que AFE est équilatéral. Soient G et H tels que BGC et CHD soient équilatéraux (intérieurs au carré). Montrez que AHG est équilatéral et comparez les aires de AFE et AHG.

Exercise 1.148 (Question subsidiaire)**.** Montrez que les solutions de $1 + z + ... + z^{n-1} - nz^n = 0$ sont de module ≤ 1. Y a-t-il des solutions de module 1 ?

Solution ici : Section 2.47.

1.8.6 Khôlle 48 : Complexes, Géométrie plane

Exercise 1.149 (Question de cours)**.** Expliquez en quoi $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$, puis en quoi $\mathbb{U}_d$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ pour $d|n$.

Exercise 1.150 (Problème principal)**.** [Construction du pentagone régulier] Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Déterminez une équation (du second degré) de solutions a et b, puis calculez $\cos {}^{2\pi}/_5$, $\cos {}^{4\pi}/_5$, $\cos {}^{\pi}/_5$ (idem sin).

Le cercle de centre Ω d'affixe $-{}^1/_2$ passant par le point M d'affixe i recoupe l'axe des abscisses en deux points I et J. Montrer que $x_I + x_J = x_I \times x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier usuel.

On appelle $ABCDE$ ce pentagone. La diagonale $[AC]$ est recoupée par les diagonales $[BD]$ et $[BE]$ en F et G. Calculez $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Exercise 1.151 (Question subsidiaire)**.** [Construction de Dürer] Que pensez-vous de la méthode de Dürer (on montrera qu'elle construit un pentagone *presque régulier*, avec une erreur de ${}^4/_{1000}$) :

Placer A et B ; tracer les cercles $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, |AB|)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(B, |AB|)$, d'intersection F et G ; tracer $\mathcal{C}(G, |AG|)$ qui coupe $\mathcal{C}_1$ en I et (FG) en K ; (IK) coupe $\mathcal{C}_2$ en C ; puis on clôt le pentagone.

Solution ici : Section 2.48.

1.9 Programme 9 : Équations différentielles

1.9.1 Khôlle 49 : Changement trigonométrique

Exercise 1.152 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercise 1.153 (Problème principal)**.** Soit g une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. Montrez que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Conclure en résolvant l'équation.

Exercise 1.154 (Question subsidiaire)**.** Intégrez l'équation suivante (sur tout intervalle ne contenant pas -1) : $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$

Solution ici : Section 2.49.

1.9.2 Khôlle 50 : Problème de recollement

Exercise 1.155 (Question de cours)**.** Parlez-moi du principe de superposition.

Exercise 1.156 (Problème principal)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercise 1.157 (Question subsidiaire)**.** Intégrez l'équation différentielle :

$$x^2 + y^2 = 2xyy'$$

Solution ici : Section 2.50.

1.9.3 Khôlle 51 : Solution périodique

Exercise 1.158 (Question de cours)**.** Pourquoi est-ce que deux courbes intégrales (réelles) issues d'une même équation d'ordre 1 ne peuvent pas se croiser ? Pourquoi est-ce ces courbes intégrales recouvrent le plan ?

Exercise 1.159 (Problème principal)**.** Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrez que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de période T.

Exercise 1.160 (Question subsidiaire)**.** On considère l'équation $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$. Intégrez-la sur $]-1,1[$ en posant $x = \sin t$. Intégrez-la sur $]-\infty,-1[$ puis sur $]1,+\infty[$. Étudiez le problème du recollement.

Solution ici : Section 2.51.

1.9.4 Khôlle 52 : Fonction de Bessel

Exercise 1.161 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ?

Exercise 1.162 (Problème principal)**.** [Fonctions de Bessel de première espèce] On pose l'équation différentielle non-linéaire $(E_n) : x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

Soit la suite de fonction $(J_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que J_0 soit solution de (E_0) et $J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x)$. Montrez que J_n est solution de (E_n). Montrez que $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$. En déduire que $J_{n+1} - J_{n-1} = -2J_n'$ puis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$. Calculez $J_n(0)(= 0)$ pour $n \neq 0$.

Exercise 1.163 (Question subsidiaire)**.** Soit (E) une équation différentielle homogène linéaire du 2^{nd} ordre (pas à coefficients constant) dont on connaît une solution y_0 qui ne s'annule pas. On pose $z : y(x) = z(x)y_0(x)$. Résolvez (E).

Solution ici : Section 2.52.

1.9.5 Khôlle 53 : Contrôle de la solution

Exercise 1.164 (Question de cours)**.** Décrivez la méthode de variation de la constante.

Exercise 1.165 (Problème principal)**.** Soit q une fonction $\mathcal{C}^1$ tels que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrez que les solutions de $y'' + q(x)y = 0$ sont bornées au voisinage de $+\infty$. (Considérez $z(x) = y^2(x) + \frac{y'(x)^2}{q(x)}$ pour $x \geq A$).

Exercise 1.166 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, résolvez :

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases} \qquad \text{(avec conditions de Cauchy en 0)}$$

Solution ici : Section 2.53.

1.9.6 Khôlle 54 : Solution particulière maximale

Exercise 1.167 (Question de cours)**.** Comment procéder avec une équation différentielle du premier ordre $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ où $a(x)$ s'annule.

Exercise 1.168 (Problème principal)**.** On considère l'équation $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle on admet le théorème suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé *solution maximale* tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement (qui reste solution) à un intervalle qui contient strictement I.

Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

Exercise 1.169 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe au plus une application $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que (puis appliquez avec $f = \cos$) :

$$\forall x, g(x) = \int_0^x (x - t)g(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

Solution ici : Section 2.54.

1.10 Programme 10 : Algèbre générale (Groupes, Anneaux...)

1.10.1 Khôlle 55 : Action de groupe

Exercise 1.170 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exercise 1.171 (Problème principal)**.** Soir G un groupe. Soit X un ensemble et $\varphi : G \times X \to X$ qui vérifie : $\forall x \in X, \varphi(e, x) = x$ et $\forall g, h \in G, \forall x \in X, \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(g \star h, x)$.

On note $\sim_G$ la relation binaire sur X : $\exists g \in G, y = \varphi(g, x)$. Montrez que $\sim_G$ est une relation d'équivalence.

Exercise 1.172 (Question subsidiaire)**.** Soit g une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. Montrez que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Conclure en résolvant l'équation.

Solution ici : Section 2.55.

1.10.2 Khôlle 56 : Sous-groupe distingué

Exercise 1.173 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un anneau ?

Exercise 1.174 (Problème principal)**.** Soit G un groupe et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrez que Ker φ est distingué dans G.

Exercise 1.175 (Question subsidiaire)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Solution ici : Section 2.56.

1.10.3 Khôlle 57 : Moyenne harmonique

Exercise 1.176 (Question de cours)**.** Que forment les éléments inversibles d'un anneau ?

Exercise 1.177 (Problème principal)**.** Sur $]-1,1[$, on définit une loi $\star$ par $\forall (x,y) \in]-1,1[, x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$

Montrez que $(]-1,1[, \star)$ est un groupe abélien.

Que pensez-vous des autres moyennes ?

Exercise 1.178 (Question subsidiaire)**.** Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrez que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de période T.

Solution ici : Section 2.57.

1.10.4 Khôlle 58 : Avant l'addition

Exercise 1.179 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exercise 1.180 (Problème principal)**.** On sait que $3+3+3+3+3 = 3 \times 5$ et $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$. On dit que la multiplication est l'opération itérée de l'addition, et que la puissance est l'opération itérée de la multiplication.

Définissez et étudiez l'opération dont l'addition est l'opération itérée (oui, elle existe !).

Exercise 1.181 (Question subsidiaire)**.** Soit (E) une équation différentielle homogène linéaire du 2^{nd} ordre (pas à coefficients constant) dont on connaît une solution y_0 qui ne s'annule pas. On pose $z : y(x) = z(x)y_0(x)$. Résolvez (E).

Solution ici : Section 2.58.

1.10.5 Khôlle 59 : Partition en deux copies d'un sous-groupe

Exercise 1.182 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un anneau ?

Exercise 1.183 (Problème principal)**.** Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G.

Exercise 1.184 (Question subsidiaire)**.** Soit q une fonction $\mathcal{C}^1$ tels que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrez que les solutions de $y'' + q(x)y = 0$ sont bornées au voisinage de $+\infty$. (On pourra considérer $z : [A, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y^2(x) + \frac{y'(x)^2}{q(x)}$).

Solution ici : Section 2.59.

1.10.6 Khôlle 60 : Loi exponentielle

Exercise 1.185 (Question de cours)**.** Que forment les éléments inversibles d'un anneau ?

Exercise 1.186 (Problème principal)**.** Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $\star$ par :

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, (x,y) \star (x',y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrez que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe non abélien. Trouvez les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.187 (Question subsidiaire)**.** On considère l'équation $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle on admet le théorème suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé *solution maximale* tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement (qui reste solution) à un intervalle qui contient strictement I.

Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

Solution ici : Section 2.60.

1.11 Programme 11 : Suites, réels, structure

1.11.1 Khôlle 61 : Densité par la moyenne

Exercise 1.188 (Question de cours)**.** Définissez la limite d'une suite et prouvez qu'elle est unique si elles existe.

Exercise 1.189 (Problème principal)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in A, a < x < b$ et $\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A$. Montrez que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 1.190 (Question subsidiaire)**.** Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G.

Solution ici : Section 2.61.

1.11.2 Khôlle 62 : Morphisme de corps

Exercise 1.191 (Question de cours)**.** Montrez qu'une suite convergente est bornée.

Exercise 1.192 (Problème principal)**.** Montrez que le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal ($I \subset k$ est un idéal si et seulement si $(I, +)$ est un groupe et $\forall \alpha \in k, \forall x \in I, \alpha x \in I$).

Montrez que les seuls idéaux d'un corps sont l'idéal nul et le corps lui-même.

En déduire qu'un morphisme de corps (non nul) est injectif, puis que si $\sigma : k \to K$ est un tel morphisme, alors k est isomorphe à un sous-corps de K.

Exercise 1.193 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.62.

1.11.3 Khôlle 63 : Borne supérieure pour les rationnels ?

Exercise 1.194 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la convergence d'un produit de suites.

Exercise 1.195 (Problème principal)**.** Montrez que $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ est non-vide, bornée, mais n'admet pas de borne supérieure. (Introduire $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$.)

Exercise 1.196 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x - a|; a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Solution ici : Section 2.63.

1.11.4 Khôlle 64 : Lemme de Cousin

Exercise 1.197 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la limite du produit d'une suite qui tend vers 0 par une suite bornée.

Exercise 1.198 (Problème principal)**.** [Lemme de Cousin] Soit $[a, b]$ un segment réel et δ une fonction strictement positive (appelée **jauge**) sur ce segment. Montrez qu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ telle que :

$$\forall i \leq n, \exists t_i \in [x_{i-1}, x_i], x_i - x_{i-1} \leq \delta(t_i)$$

On pourra poser $C = \{y \in [a, b]; [a, y] \text{ possède une subdivision}\}$.

Exercise 1.199 (Question subsidiaire)**.** Soit G un groupe et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrez que $\text{Ker } \varphi$ est distingué dans G.

Solution ici : Section 2.64.

1.11.5 Khôlle 65 : Irrationalité de la constante de Néper

Exercise 1.200 (Question de cours)**.** Montrez que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent avec $u_n < v_n$ APCR, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Exercise 1.201 (Problème principal)**.** On va montrer l'irrationalité de e. Montrez que $\forall n, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$, puis $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

Exercise 1.202 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\left\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps commutatif.

Solution ici : Section 2.65.

1.11.6 Khôlle 66 : Théorème de Beatty

Exercise 1.203 (Question de cours)**.** Montrez que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 1.204 (Problème principal)**.** [Théorème de Beatty] On note $A(x) = \left\{\lfloor nx \rfloor; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $(A(x), A(y))$ est un partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ et $x, y \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 1.205 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Solution ici : Section 2.66.

1.12 Programme 12 : Suites

1.12.1 Khôlle 67 : Densité de la différence de deux suites

Exercise 1.206 (Question de cours)**.** Quelles sont les limites possibles pour une suite de réels strictement croissante.

Exercise 1.207 (Problème principal)**.** Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m; (p,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

Exercise 1.208 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x-a|; a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Solution ici : Section 2.67.

1.12.2 Khôlle 68 : Piles de cartes

Exercise 1.209 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème des gendarmes.

Exercise 1.210 (Problème principal)**.** J'ai un paquet infini de carte. Je pose la première carte au bord de la table de sorte que son centre de gravité soit parfaitement sur la frontière de la table (la moitié de la carte est sur la table, l'autre au-dessus du vide). Je pose une autre carte dessus de sorte qu'elle dépasse au dessus du vide et que la pile soit à la limite de tomber (le centre de gravité de la pile est à la frontière de la table), puis une troisième, etc. Est-ce que le point de la pile de carte le plus éloigné du bord de la table peut se trouver arbitrairement loin ?

Exercise 1.211 (Question subsidiaire)**.** Montrez qu'une suite de Cauchy converge et qu'une suite convergente et de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

Solution ici : Section 2.68.

1.12.3 Khôlle 69 : Variation de la constante pour les suites

Exercise 1.212 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercise 1.213 (Problème principal)**.** On considère $(u_n)_n$ qui vérifie $u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$ (et u_0 fixé). Montrez que $(v_n)_n$ vérifiant $v_{n+1} - (n+1)v_n = 0$ et $v_0 = C$ vaut $v_n = Cn!$. Trouvez une condition sur $C(n)$ telle que $u_n = C(n)n!$ et résoudre.

Procédez de même pour $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

Exercise 1.214 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\inf_{\alpha \in]0,\pi[}(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sin n\alpha|)$.

Solution ici : Section 2.69.

1.12.4 Khôlle 70 : Moyenne arithmético-géométrique

Exercise 1.215 (Question de cours)**.** Parlez-moi des suites récurrences d'ordre 2.

Exercise 1.216 (Problème principal)**.** Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par $u_0 = x$ et $v_0 = y$ puis :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

Montrez que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Ont appelle $M(x,y)$ cette limite (moyenne arithmético-géométrique). Montrez que M est symétrique, homogène de degré 1 ($M(tx,ty) = tM(x,y)$) et que le cas d'égalité de $\min(x,y) \leq \sqrt{xy} \leq M(x,y) \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x,y)$ est seulement $x = y$.

Pour la culture, on peut montrer que $\frac{\pi/2}{M(x,y)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y \sin^2 t}}$ en utilisant le changement de variable $u = t + \arctan\left(\frac{y}{x}\tan t\right)$ dans l'intégrale qui exprime $M\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right)$.

Exercise 1.217 (Question subsidiaire)**.** Montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Solution ici : Section 2.70.

1.12.5 Khôlle 71 : Théorème de Beatty

Exercise 1.218 (Question de cours)**.** Définissez les notations de Landau.

Exercise 1.219 (Problème principal)**.** [Théorème de Beatty] On note $A(x) = \{\lfloor nx \rfloor ; n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $(A(x), A(y))$ est un partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ et $x, y \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 1.220 (Question subsidiaire)**.** Soit $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifiant que $\forall n, (1-u_n)u_{n+1} > 1/4$. Montrez que $u_n \to 1/2$ quand $n \to +\infty$.

Solution ici : Section 2.71.

1.12.6 Khôlle 72 : Césaro multiplicatif

Exercise 1.221 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Exercise 1.222 (Problème principal)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrez que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ converge aussi vers ℓ. Étudiez la réciproque.

Appliquez avec les suites $(u_n)_n \in \left\{ \left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \right)_n ; \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right)_n ; \left(\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \right)_n \right\}$.

Exercise 1.223 (Question subsidiaire)**.** Trouvez un exemple de suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, (u_{kn})_n$ est convergente.

Solution ici : Section 2.72.

1.13 Programme 13 : Développement limités, Suites

1.13.1 Khôlle 73 : Comparaison avec une fonction non-explicite

Exercise 1.224 (Question de cours)**.** Parlez-moi des développement limités.

Exercise 1.225 (Problème principal)**.** Comparez au voisinage de $+\infty$: e^{x^2} avec $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercise 1.226 (Question subsidiaire)**.** Soit $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifiant que : $\forall n, (1-u_n)u_{n+1} > 1/4$. Montrez que $u_n \to 1/2$ quand $n \to +\infty$.

Solution ici : Section 2.73.

1.13.2 Khôlle 74 : Développement d'un raccord de fonction

Exercise 1.227 (Question de cours)**.** Parlez-moi des notations de Landau pour les fonctions (avec démonstration somme et produit).

Exercise 1.228 (Problème principal)**.** Soit f la fonction définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \cosh\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f a-t-elle un développement limité en 0, si oui lequel (ordre n) ?

Exercise 1.229 (Question subsidiaire)**.** Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1}-u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m; (p,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

Solution ici : Section 2.74.

1.13.3 Khôlle 75 : Développement d'une intégrale

Exercise 1.230 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule de Taylor-Young.

Exercise 1.231 (Problème principal)**.** Donnez un développement à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercise 1.232 (Question subsidiaire)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ avec $u_1 = 1$ qui vérifie que pour tout n, $2u_n$ est inférieur à au moins la moitié des termes $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Montrez que $u_n \to 0$.

Solution ici : Section 2.75.

1.13.4 Khôlle 76 : Développement d'une réciproque

Exercise 1.233 (Question de cours)**.** Donnez-moi les développement limités de ln, exp. Déduire de ce dernier les développements de sin, cos et sinh, cosh.

Exercise 1.234 (Problème principal)**.** On pose $f : x \mapsto 2\tan x - x$. Montrez que f admet une réciproque impaire sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculez le développement de f^{-1} à l'ordre 6.

Exercise 1.235 (Question subsidiaire)**.** Calculez $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} (\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sin n\alpha|)$.

Solution ici : Section 2.76.

1.13.5 Khôlle 77 : Approximant de Padé

Exercise 1.236 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercise 1.237 (Problème principal)**.** [Approximant de Padé] Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement de $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit du plus grand degré possible.

Exercise 1.238 (Question subsidiaire)**.** J'ai un paquet infini de carte. Je pose la première carte au bord de la table de sorte que son centre de gravité soit parfaitement sur la frontière de la table (la moitié de la carte est sur la table, l'autre au-dessus du vide). Je pose une autre carte dessus de sorte qu'elle dépasse au dessus du vide et que la pile soit à la limite de tomber (le centre de gravité de la pile est à la frontière de la table), puis une troisième, etc. Est-ce que le point de la pile de carte le plus éloigné du bord de la table peut se trouver arbitrairement loin ?

Solution ici : Section 2.77.

1.13.6 Khôlle 78 : Équation différentielle

Exercise 1.239 (Question de cours)**.** Quel est le rapport entre le prolongement d'une fonction et son développement limité.

Exercise 1.240 (Problème principal)**.** Soit $(E) : 2xy'' - y' + x^2 y = 0$. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) possédant un développement limité à tout ordre. Trouvez f. En déduire le changement de variable adéquat et résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_-$ puis $\mathbb{R}_+$ et enfin $\mathbb{R}$.

Exercise 1.241 (Question subsidiaire)**.** Soit une suite $(u_n)_n$, on définit $(v_n)_n$ par : $v_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n)$. Montrez que si $(u_n)_n$ converge, alors $(v_n)_n$ aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

Solution ici : Section 2.78.

1.14 Programme 14 : Espaces vectoriels 1, Développement

1.14.1 Khôlle 79 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Exercise 1.242 (Question de cours)**.** Donnez les axiomes des espaces vectoriels. Montrez que la commutativité de $+$ découle de ceux-ci.

Exercise 1.243 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Exercise 1.244 (Question subsidiaire)**.** La fonction $x \mapsto \arccos x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ? Donnez un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.

Solution ici : Section 2.79.

1.14.2 Khôlle 80 : Sous-espace engendré

Exercise 1.245 (Question de cours)**.** Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. Parlez-moi de $F \cap G$ et $F \cup G$ (on montrera que $F \cup G$ est un sous-espace si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exercise 1.246 (Problème principal)**.** Montrer que $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

Exercise 1.247 (Question subsidiaire)**.** Calculez le développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Solution ici : Section 2.80.

1.14.3 Khôlle 81 : Évaluation des polynômes

Exercise 1.248 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'une somme directe, que sont des espaces supplémentaires ?

Exercise 1.249 (Problème principal)**.** Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. En combien de points faut-il évaluer un polynôme de degré n pour le déterminer entièrement ?

Exercise 1.250 (Question subsidiaire)**.** Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donnez un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a + b) - f_n(a)f_n(b)$. Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Solution ici : Section 2.81.

1.14.4 Khôlle 82 : Combinaison linéaire

Exercise 1.251 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la méthode du pivot.

Exercise 1.252 (Problème principal)**.** Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercise 1.253 (Question subsidiaire)**.** Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Solution ici : Section 2.82.

1.14.5 Khôlle 83 : Espace engendré par un cône

Exercise 1.254 (Question de cours)**.** Qu'est-ce qu'un espace vectoriel. Donnez-moi des exemples d'espaces vectoriels.

Exercise 1.255 (Problème principal)**.** Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$. C est-il un espace vectoriel pour les opérations usuelles ? Montrez que $V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); \exists (g, h) \in C^2, f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercise 1.256 (Question subsidiaire)**.** Étudiez au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$. Existe-t-il une tangente ?

Solution ici : Section 2.83.

1.14.6 Khôlle 84 : Ensemble milieu

Exercise 1.257 (Question de cours)**.** Parlez-moi des combinaisons linéaires.

Exercise 1.258 (Problème principal)**.** Dans le plan, on se donne n points $A_1, ..., A_n$. Existe-t-il n points $M_1, ..., M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$?

Exercise 1.259 (Question subsidiaire)**.** Étudiez de la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ avec $0 < a < b$ des réels fixés.

Solution ici : Section 2.84.

1.15 Programme 15 : Espaces vectoriels 2, Continuité

1.15.1 Khôlle 85 : Fonction vectorielle de Leibnitz

Exercise 1.260 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la limite d'une composée.

Exercise 1.261 (Problème principal)**.** [Fonction vectorielle de Leibnitz] Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$ d'un espace vectoriel E. On construit $f : E \to E$ définie par $f(M) = \sum_i a_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_i a_i(A_i - M)$. On pose G le barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, c'est-à-dire l'unique point tel que $\sum_i a_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Montrez que $f(M) = (\sum_i a_i)\,\overrightarrow{MG}$. En déduire les coordonnées de G dans le repère de centre O. Donner une représentation matricielle de ce résultat.

Que se passe-t-il si $\sum_i a_i = 0$?

Exercise 1.262 (Question subsidiaire)**.** Soit $F = \left\{f \in E \ ; \ \int_0^1 f = 0\right\}$ pour $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. Montrez que F est un sous-espace et donnez un supplémentaire.

Solution ici : Section 2.85.

1.15.2 Khôlle 86 : Familles libres et liées

Exercise 1.263 (Question de cours)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est liée. Montrez que u est une homothétie.

Exercise 1.264 (Problème principal)**.** Étudiez la liberté des familles suivantes :

- $((2, i, 4, -i); (i, -1, -i, 1); (0, 3, -i, 1))$
- (f_a, f_b, f_c) où $f_u : x \mapsto \sin(x + u)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $f_n : x \mapsto nx + n^2 + 1$.

Exercise 1.265 (Question subsidiaire)**.** Soit F un sous-espace de E, et $v, w \in E$. Montrez que :

$$F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w \Leftrightarrow \exists u \in F, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha\beta \neq 0 \text{ et } u + \alpha v + \beta w = 0$$

Solution ici : Section 2.86.

1.15.3 Khôlle 87 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Exercise 1.266 (Question de cours)**.** Montrez que si une fonction admet une limite en un point, il existe un voisinage de celui-ci sur lequel elle est bornée.

Exercise 1.267 (Problème principal)**.** Soient $a, b, c \in [0, 1]^3$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2. Montrez l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$.

Déterminez explicitement ces réels en fonction de a, b, c.

Exercise 1.268 (Question subsidiaire)**.** Soient f et g deux formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Montrez que : $f \times g = 0 \Leftrightarrow g = 0$ ou $f = 0$.

Solution ici : Section 2.87.

1.15.4 Khôlle 88 : Semi-inverse des applications linéaires injectives

Exercise 1.269 (Question de cours)**.** Montrez qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Exercise 1.270 (Problème principal)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que : Ker $v \subset$ Ker $u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), u = w \circ v$. En déduire que : v injectif $\Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), w \circ v = Id_E$

Exercise 1.271 (Question subsidiaire)**.** Montrez que p est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.

Solution ici : Section 2.88.

1.15.5 Khôlle 89 : Stabilité et commutation

Exercise 1.272 (Question de cours)**.** Parlez-moi des espaces supplémentaires.

Exercise 1.273 (Problème principal)**.** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que si f et g commutent, alors Ker g et Im g sont stables par f. Réciproquement, montrez que si g **est un projecteur** et que Ker g et Im g sont stables par f, alors f et g commutent.

Exercise 1.274 (Question subsidiaire)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On définit :

$$\varphi : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x t f(t) \mathrm{d}t \right)$$

Montrez que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Solution ici : Section 2.89.

1.15.6 Khôlle 90 : Une équation différentielle d'ordre supérieur

Exercise 1.275 (Question de cours)**.** Parlez-moi de l'injectivité des applications linéaires.

Exercise 1.276 (Problème principal)**.** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $U : f \mapsto f' - 2xf$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez Ker U^n.

Exercise 1.277 (Question subsidiaire)**.** Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrez que $F' \oplus G = E$.

Solution ici : Section 2.90.

1.16 Programme 16 : Continuité, Polynômes 1

1.16.1 Khôlle 91 : Autour des valeurs intermédiaires

Exercise 1.278 (Question de cours)**.** Parlez-moi des familles de polynômes de degré échelonné.

Exercise 1.279 (Problème principal)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires et injective. Montrez que f est continue.

Même question pour g possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall r \in \mathbb{Q}, X_r = g^{-1}(\{r\})$ est fermée (c'est-à-dire que toute suite convergente de points de X_r a sa limite dans X_r).

Exercise 1.280 (Question subsidiaire)**.** Trouvez f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Solution ici : Section 2.91.

1.16.2 Khôlle 92 : Jouer avec la partie entière

Exercise 1.281 (Question de cours)**.** Montre le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercise 1.282 (Problème principal)**.** Étudiez en chaque point de $\mathbb{R}_+^*$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, et la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $f(0) = 1$. Généralisez à $f_n : x \mapsto x^n \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Tracez f_1.

Exercise 1.283 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $K = [c,d] \subset f(I)$. Montrez qu'il existe $L \subset I$ un segment tel que $f(L) = K$.

Solution ici : Section 2.92.

1.16.3 Khôlle 93 : Fonction périodique déviée

Exercise 1.284 (Question de cours)**.** Montrez que la réciproque d'une bijection continue est continue.

Exercise 1.285 (Problème principal)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $f+g$ est croissante. Montrez que g est constante.

Exercise 1.286 (Question subsidiaire)**.** Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues qui commutent. On veut montrer qu'il existe un point commun : $\exists x, f(x) = g(x)$.

a) Par l'absurde : montrez qu'en l'absence de point commun, on peut supposer $f > g$, puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$ puis $\forall x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$ et concluez.

b) Par les points fixes : on pose X l'ensemble des points fixes de f, montrez qu'il n'est pas vide, qu'il admet un minimum x_m et un maximum x_M et concluez en comparant f et g en x_m et x_M.

Solution ici : Section 2.93.

1.16.4 Khôlle 94 : Pseudo-dérivation

Exercise 1.287 (Question de cours)**.** Comment fonctionne la division euclidienne dans les polynômes ?

Exercise 1.288 (Problème principal)**.** Soit f définie sur un voisinage de 0 et vérifiant : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrez que $f \in o(x)$.

Exercise 1.289 (Question subsidiaire)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Soit $B \subset A$ une partie dense de A. Montrez que $f(B)$ est dense dans $f(A)$. En déduire que $\{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, +1]$.

Solution ici : Section 2.94.

1.16.5 Khôlle 95 : Indicatrice des nombres premiers

Exercise 1.290 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercise 1.291 (Problème principal)**.** Soit $f : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{P}}(x)$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Pour $x > 1$, étudier la convergence de la suite $(f(xn))_n$. Est-ce que f admet une limite en $+\infty$?

Exercise 1.292 (Question subsidiaire)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que f soit croissante mais $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrez que f est continue.

Solution ici : Section 2.95.

1.16.6 Khôlle 96 : Continuité d'une fonction limite

Exercise 1.293 (Question de cours)**.** Parlez-moi du théorème de la limite monotone.

Exercise 1.294 (Problème principal)**.** Soit f définie par $f(-1) = f(1) = 0$ et si $|x| \neq 1$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$. Étudiez la continuité de f.

Exercise 1.295 (Question subsidiaire)**.** Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$, f, g continues et g croissante. On suppose que f et g commutent. Montrez qu'elles ont un point fixe commun.

Solution ici : Section 2.96.

1.17 Programme 17 : Polynômes 2

1.17.1 Khôlle 97 : Stabilisation polynomiale du cercle

Exercise 1.296 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la division euclidienne des polynômes.

Exercise 1.297 (Problème principal)**.** Résoudre $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

On commencera par trouver des solutions évidentes, ainsi qu'une structure sur l'ensemble des solutions. Ensuite, on résoudra en supposant que toute solution (de degré > 0) s'annule en 0. Enfin, on montrera que $P(0) = 0$ en s'intéressant à $X^n P(X) \overline{P}(\frac{1}{X})$.

Résoudre $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$

Exercise 1.298 (Question subsidiaire)**.** [Polynômes de Bernoulli] On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$; $B_{2p+1}(0) = 0$ (sauf $B_1(0) \neq 0$).

Montrez que $\forall p, B_p(0) = B_p(1)$ et $\forall p, \forall x \in \mathbb{C}, B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$.

Solution ici : Section 2.97.

1.17.2 Khôlle 98 : Système complexe et fonctions élémentaires

Exercise 1.299 (Question de cours)**.** Parlez-moi des polynômes premiers.

Exercise 1.300 (Problème principal)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $x+y+z = a$ et $xyz = b$ et $|x| = |y| = |z|$. Appliquez avec $a = b = 1$.

Exercise 1.301 (Question subsidiaire)**.** [Polynômes de Bernoulli] On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $B_p' = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p = 0$ sauf pour $B_0 = 1$.

Montrez qu'il existe une suite $(b_n)_n$ telle que $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$.

Solution ici : Section 2.98.

1.17.3 Khôlle 99 : Lemme de Thom

Exercise 1.302 (Question de cours)**.** Parlez-moi des racines d'un polynôme.

Exercise 1.303 (Problème principal)**.** [Lemme de Thom] Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation et $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}} \in \{-1, 0, +1\}^{\mathcal{F}}$ fixé. On note $E_P = \{x \in \mathbb{R}; P(x) \text{ est du signe de } \varepsilon_P\}$. Montrez que $E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P\in\mathcal{F}} E_P$ est un intervalle.

Exercise 1.304 (Question subsidiaire)**.** [Polynômes de Bernoulli] On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$.

Montrez que $B_p(0) = B_p(1)$, ce sont les nombres de Bernoulli, $b_p \in \mathbb{C}$. Montrez que $b_p \in \mathbb{Q}$.

Solution ici : Section 2.99.

1.17.4 Khôlle 100 : Croisements de Ghys

Exercise 1.305 (Question de cours)**.** Parlez-moi des polynômes scindés.

Exercise 1.306 (Problème principal)**.** [Croisement de Ghys] Soit P un polynôme qui s'annule en 0. Montrez que si $val(P)$ est paire, alors P est du même signe à gauche et à droite de 0. Trouvez deux polynômes P et Q tels que $P < Q$ avant 0 et $P < Q$ après 0. Idem avec $P < Q$ avant et $P > Q$ après. Même question avec les 6 possibilités pour 3 polynômes. Pour 4 polynômes, montrez qu'il n'est pas possible que $P_4 < P_3 < P_2 < P_1$ avant 0 et $P_3 < P_1 < P_4 < P_2$ après.

Exercise 1.307 (Question subsidiaire)**.** [Polynômes de Bernoulli] On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$; $B_p'(0) = pB_{p-1}(0)$.

Montrez que $\forall p, B_{p+1}' = (p+1)B_p$, puis $\int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0$. Calculez $\sum_{k=0}^{n} k^6$.

Solution ici : Section 2.100.

1.17.5 Khôlle 101 : Inversion de matrice par des polynômes

Exercise 1.308 (Question de cours)**.** Parlez-moi des fonctions symétriques.

Exercise 1.309 (Problème principal)**.** Soit d fixé et deux familles de $d+1$ complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. On pose $f(X) = \sum_i f_i X^i$ et $h(X) = \sum_j h_j X^j$. Montrez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a > b$) : $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j \iff f(X) = h(X+1)$

En déduire l'expression des h_j en fonction des f_i quand $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j$.

Exercise 1.310 (Question subsidiaire)**.** [Polynômes de Bernoulli] On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$ avec $B_0 = 1$ et $B_p(0) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0)$.

Montrez que $\forall p \in \mathbb{N}, B_p(x+y) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(x) y^{p-k}$.

Solution ici : Section 2.101.

1.17.6 Khôlle 102 : Polynômes de Laguerre

Exercise 1.311 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la formule de Leibniz.

Exercise 1.312 (Problème principal)**.** [Polynômes de Laguerre] On se donne l'équation différentielle non-linéaire (E_n) : $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$. Soit la suite de polynômes définie par $L_n(0) = 1$, $L_0 = 1$ et $XL_n' - n(L_n - L_{n-1}) = 0$. Montrez que $L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} X^k$, puis que L_n est solution de (E_n).

Donnez le coefficient dominant de L_n, son degré et son terme constant.

Exercise 1.313 (Question subsidiaire)**.** [Suite] Montrez que (E_n) : $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = ne^{-x}y$. Montrez que $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right)$.

Solution ici : Section 2.102.

1.18 Programme 18 : Dérivation, Taylor

1.18.1 Khôlle 103 : Étude de fonction

Exercise 1.314 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la dérivabilité de la composition.

Exercise 1.315 (Problème principal)**.** Étudiez la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Exercise 1.316 (Question subsidiaire)**.** Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Soit $\Delta : x \mapsto (f(a)-f(x))(g(b)-g(x))-(g(a)-g(x))(f(b)-f(x))$. Montrez que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculez sa dérivée. En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Remarquez ce qui se passe quand $g : x \mapsto x$.

Solution ici : Section 2.103.

1.18.2 Khôlle 104 : Formule de Leibnitz et dénombrement

Exercise 1.317 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'égalité des accroissements finis.

Exercise 1.318 (Problème principal)**.** Montrez que la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$ existe et est : $x \mapsto n! \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k}^2 (1-x)^{n-k} x^k\right)$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(= \binom{2n}{n}\right)$. (regarder le terme en x^{2n} dans le développement de $x^n(1-x)^n$).

Exercise 1.319 (Question subsidiaire)**.** Soit f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution ici : Section 2.104.

1.18.3 Khôlle 105 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur

Exercise 1.320 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de Rolle.

Exercise 1.321 (Problème principal)**.** Soit f une fonction s'annulant n fois, en $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et n fois dérivable sur $[x_1, x_n]$. Soit $a \in [x_1, x_n]$. Montrez qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (a - x_k)$$

Exercise 1.322 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{x \in [a,b]} f'(x)$. Montrez que f est affine.

Solution ici : Section 2.105.

1.18.4 Khôlle 106 : Théorème de Darboux

Exercise 1.323 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective.

Exercise 1.324 (Problème principal)**.** [Théorème de Darboux] Soit f dérivable (pas forcément $\mathcal{C}^1$).

Montrez que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.

(Utilisation de la méthode) Soit $I = [a, b]$ et f dérivable telle que $f(a)f'(b) \geq 0$ et $f(b)f'(a) \leq 0$. Montrez que f' s'annule.

Exercise 1.325 (Question subsidiaire)**.** Soit f définie et dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrez que $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Donnez une interprétation géométrique.

Solution ici : Section 2.106.

1.18.5 Khôlle 107 : Recoupage tangentiel

Exercise 1.326 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez l'inégalité des accroissements finis.

Exercise 1.327 (Problème principal)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Exercise 1.328 (Question subsidiaire)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$ pour tout x. Montrez que f' est constante puis déterminer f (on remarquera que $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$).

Solution ici : Section 2.107.

1.18.6 Khôlle 108 : Fonction de Lambert

Exercise 1.329 (Question de cours)**.** Expliquez comment et pourquoi sa dérivée donne les variations d'une fonction.

Exercise 1.330 (Problème principal)**.** [Fonction de Lambert] Développer la fonction W de Lambert au voisinage de 0. La fonction W de Lambert est l'unique solution $W(x)$ de l'équation $x = we^w$ d'inconnue $w \geq -1$ et de paramètre $x \geq -{}^1/_e$. On commencera d'abord par en trouver un équivalent, puis une équation différentielle que satisfait W.

Exercise 1.331 (Question subsidiaire)**.** Soir un fonction f dérivable telle que $f'(x) + f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrez que $f'(x) \to 0$ et $f(x) \to 0$ (on pourra poser $g(x) = e^x f(x)$).

Solution ici : Section 2.108.

1.19 Programme 19 : Espaces de dimension finie 1

1.19.1 Khôlle 109 : Principe des trapèzes

Exercise 1.332 (Question de cours)**.** Parlez-moi du prolongement $\mathcal{C}^k$.

Exercise 1.333 (Problème principal)**.** Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_0, u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de r vecteurs de rang s'. Montrez que $s' \geq r + s - n$.

Exercise 1.334 (Question subsidiaire)**.** Soit f une fonction $\mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ trois fois dérivable. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$$

(On trouvera le bon A pour utiliser la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - A(x-a)^3$.)

On donnera une interprétation géométrique lorsque f est vue comme une primitive de f'.

Solution ici : Section 2.109.

1.19.2 Khôlle 110 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Exercise 1.335 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez la formule de Grassman.

Exercise 1.336 (Problème principal)**.** [Matroïdes] On se donne n vecteurs : $(v_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^d$. On construit $\mathcal{I} = \{E \subset [1, n]; (v_i)_{i\in E} \text{ est libre}\}$. Montrez que $\mathcal{I}$ est un matroïde, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} & \emptyset \in \mathcal{I} \\ \forall X \in \mathcal{I}, & Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathcal{I} \\ \forall X, Y \in \mathcal{I}, & |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \backslash X,\ X \cup \{e\} \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Exercise 1.337 (Question subsidiaire)**.** Soir f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution ici : Section 2.110.

1.19.3 Khôlle 111 : Une fonction non nulle mais localement nulle

Exercise 1.338 (Question de cours)**.** Démontrez que $n + 1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de n mêmes vecteurs forment une famille liée.

Exercise 1.339 (Problème principal)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x, \exists p_x, f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrez que f est nilpotente.

Exercise 1.340 (Question subsidiaire)**.** On pose $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$. Montrez que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution ici : Section 2.111.

1.19.4 Khôlle 112 : Réunion finie de sous-espaces stricts

Exercise 1.341 (Question de cours)**.** Parlez-moi de la dérivée n-ième d'une composée.

Exercise 1.342 (Problème principal)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps **infini** et **commutatif**. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrez que E ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de sous-espaces strictes.

Exercise 1.343 (Question subsidiaire)**.** Étudiez la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Solution ici : Section 2.112.

1.19.5 Khôlle 113 : Centre du groupe des applications linéaires

Exercise 1.344 (Question de cours)**.** Donnez et démontrez le théorème de la base incomplète.

Exercise 1.345 (Problème principal)**.** [Centre de $\mathscr{L}(E)$] Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrez que f est une homothétie.

On suppose que E est de dimension finie. Montrez que l'ensemble des applications linéaires qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des homothéties.

Exercise 1.346 (Question subsidiaire)**.** Soir un fonction f dérivable telle que $f'(x) + f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrez que $f'(x) \to 0$ et $f(x) \to 0$ (on pourra poser $g(x) = e^x f(x)$).

Solution ici : Section 2.113.

1.19.6 Khôlle 114 : Base du dual de l'espace des polynômes

Exercise 1.347 (Question de cours)**.** Caractérisez les bases d'un espace de dimension finie.

Exercise 1.348 (Problème principal)**.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et la donner. Montrez que la famille des $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* avec : $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$.

Exercise 1.349 (Question subsidiaire)**.** Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Soit $\Delta : x \mapsto (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x))$. Montrez que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculez sa dérivée. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Solution ici : Section 2.114.

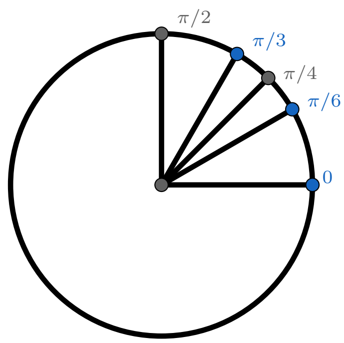
2 Solutions

2.1 Correction Khôlle 1 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 1 : Trigonométrie.

Exercise 2.1 (Question de cours)**.** Il n'est pas nécessaire de connaître par cœur les formules trigonométriques. Néanmoins, il est essentiel de savoir tracer rapidement et efficacement le cercle et y lire les valeurs notables $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$,... et certaines formules qui lient cos, sin, tan,... En particulier : $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$. Bien d'autres formules sont plus simples à exprimer via les exponentielles complexes.

On pourra trouver un cercle trigonométrique ici.



Exercise 2.2 (Problème principal)**.** Plusieurs pistes sont possibles. La plus efficace consiste à poser la fonction $f : x \mapsto \sin\cos x - \cos\sin x$, puis d'en étudier le signe (c'est un réflexe à acquérir face à ce genre de problème). Une étude de signe commence toujours par la résolution de l'équation $f(x) = 0$, dont la résolution peut être rédigée comme il suit.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. On a alors : $\cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) - \cos\sin x = 0$

De fait : $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x$

Il s'ensuit que : $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$

On remarque ici une forme en $a\cos\theta + b\sin\theta$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$. En appliquant ce résultat, on a : $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \varphi_\pm)$ pour un certain $\varphi_\pm$ (qu'il n'est pas utile de calculer et qui est différent pour le $+$ et pour le $-$ du $\pm$, attention à l'abus de notation).

Dès lors : $\cos(x+\varphi_\pm) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Or une simple vérification donne : $\pi > 3 > 2\sqrt{2}$, donc $\cos(x + \varphi_\pm) > 1$.

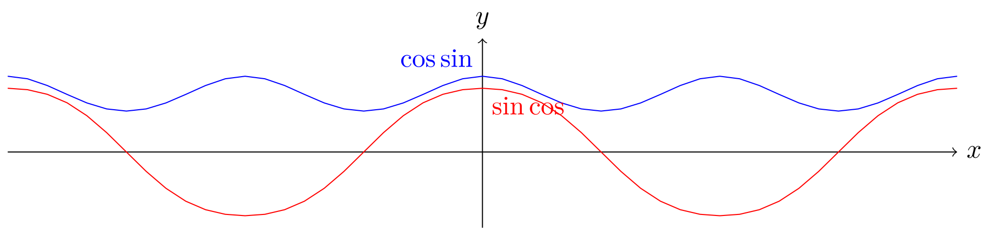
Cela est impossible, ainsi, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f garde un signe fixe. Calculons $f(0)$ pour le déterminer (en utilisant à nouveau que $\sin < 1$) :

$$f(0) = \sin 1 - \cos 0 = \sin 1 - 1 < 0$$

Finalement, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\cos x < \cos\sin x$$



Exercise 2.3 (Question subsidiaire)**.** Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle usuellement tracé dans le cercle trigonométrique. Identifiez les côtés et lisez les valeurs, on retrouve directement la formule souhaitée. Le but est plus de voir si vous parvenez à fournir une explication orale claire du tac-au-tac sur un problème dont vous avez parfaitement intégré la formule mais pas forcément la démonstration.

On pourrait aussi vous demander de démontrer grâce au cercle trigonométrique que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, en définissant $\tan x$ (pour $x \in \mathbb{R}$) comme la longueur indiquée sur la deuxième image de la page Wikipédia mentionnée ci-dessus.

Retour à Khôlle 1 : Trigonométrie.

2.2 Correction Khôlle 2 : Logique

Retour à Khôlle 2 : Logique. L'intérêt de cette khôlle est de vous sortir de votre zone de confort (doucement) en vous demandant de travailler avec une notion abstraite dont vous ne maîtrisez pas pleinement les tenants et les aboutissants. Prenez votre temps, faites les choses calmement et saisissez l'occasion pour apprendre des choses nouvelles : **profitez !**

Exercise 2.4 (Question de cours)**.** On rappelle les tables de vérités usuelles. On fera attention à celle de l'implication. Pour chacune, essayez de trouver des phrases claires en français que illustrent les cas que vous pensez compliqués.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

Exercise 2.5 (Problème principal)**.** Pour démontrer une telle proposition, on va construire petit à petit la formule en vérifiant que dans les 4 cas possibles pour P et Q, la formule est vraie (c'est-à-dire qu'on a une colonne avec que des 1).

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \neg P \Rightarrow Q$	$\gamma : \alpha \wedge \beta$	$\gamma \Rightarrow Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

On remarquera qu'on a même montré une formule plus forte car les colonnes Q et γ sont rigoureusement les mêmes : $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow Q$

N'hésitez pas à interpréter la phrase en français à l'aide de "P : il va pleuvoir demain" et "Q : je vais prendre mon parapluie demain".

On procède de la même manière :

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \alpha \Rightarrow P$	$\beta \Rightarrow P$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Ici aussi, on a en réalité une équivalence entre P et β : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow P$.

Vous pouvez vous amuser à remplacer les assertions P et Q par des phrases dotées de sens, mais cette formule est bien moins intuitive que la précédente !

Exercise 2.6 (Question subsidiaire)**.** Interprétation : prendre P : il va pleuvoir demain et Q : Je prendrai mon parapluie demain.

Équivalences finales : Voir ci-dessus.

Autre démonstration de Pierce : On utilise le principe de contraposition, l'écriture de l'implication comme disjonction et le lois de De Morgan :

$$\begin{aligned}
&(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg P))
\end{aligned}$$

La dernière affirmation est une tautologie en vertu du principe du tiers exclus : $A \vee \neg A$ (en réalité, la loi de Pierce est équivalente au principe du tiers exclu).

Retour à Khôlle 2 : Logique.

2.3 Correction Khôlle 3 : Logique

Retour à Khôlle 3 : Logique.

Exercise 2.7 (Question de cours)**.** Soit $\mathcal{P}$ le plan usuel. On a le théorème de Thalès :

$\forall (A, B, C, D, E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$(BC) \parallel (DE) \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

Sa réciproque (qui est vraie) :

$\forall (A, B, C, D, E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow (BC) \parallel (DE)$

Et sa contraposée (qui est vraie) :

$\forall (A, B, C, D, E) \in \mathcal{P}^5, B \in (AD) \wedge C \in (AE)$:
$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE} \Rightarrow (BC) \nparallel (DE)$

Exercise 2.8 (Problème principal)**.** Montrons la contraposée : si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8. Soit n impair, il s'écrit alors $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1; 3\}$. De fait : $n^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1$. Reste à regarder que $3^2 - 1 = 8$ et $1^2 - 1 = 0$ sont des multiples de 8, ce qui est évident.

Exercise 2.9 (Question subsidiaire)**.** La division en 4 carrés se fait par les médiatrices des côtés (il faut montrer que ce sont des carrés tout de même). La division en 6 est plus astucieuse. Il faut prendre la division en 9 carrés (on divise chacun des côtés en 3), et réunir les 4 carrés en haut à gauche. Pour la division en 8 carrés, il faut construire un premier carré, mettre 3 petits carré en dessous, 3 à sa droite et 1 en bas à droite.

$n = 4$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 9$

Ensuite, on peut passer d'une division en n carrés à une division en $n + 3$ carrés en divisant un des carrés présents en 4 (ce qui ajoute $4 - 1 = 3$ carrés). Ainsi, un carré est divisible en n carrés (pas forcément de tailles identiques) pour $n \in \{4\} \cup [\![6, +\infty]\!]$. **Une rédaction propre de la récurrence est attendue.**

Pour compter le nombre manières de découper un carré en n, il faut partir des 1 découpages en 4 et des 4 découpages en 6 et on peut alors compter le nombre de manières de découper un carrée en n carrés par :

$$u_n = (n - 3)u_{n-3} + 4(n - 6)u_{n-6}$$

Attention, on compte ici les processus de séparation, pas les figures obtenues (ce deuxième calcul étant bien plus ardu).

Retour à Khôlle 3 : Logique.

2.4 Correction Khôlle 4 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 4 : Trigonométrie.

Exercise 2.10 (Question de cours)**.** On peut par exemple partir de :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ensuite :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme ce sont des nombres positifs, on a : $\left(\cos\frac{\pi}{8}; \sin\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Exercise 2.11 (Problème principal)**.** On peut le montrer par récurrence. L'écriture exponentielle est la plus efficace. Soit $S_n = \sum e^{i\sum_i^n \pm a_i}$. Il y a 2^n termes dans la somme, et on a :

$$S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$$

$$S_{n+1} = \sum e^{i\sum_i^{n+1} \pm a_i} = e^{ia_n}S_n + e^{-ia_n}S_n = 2\cos a_n S_n$$

Par récurrence, on montre bien que : $S_n = 2^n \prod_i^n \cos a_i$

On a ensuite les parties réelles et imaginaires :

$$\sum \cos\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Re(S_n) = 2^n \prod_i^n \cos a_i$$

$$\sum \sin\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Im(S_n) = 0$$

Exercise 2.12 (Question subsidiaire)**.** On rappelle que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. On note $\Re z$ et $\Im z$ les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe z. Dès lors (la deuxième ligne est une somme géométrique) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k\pi}{2}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1-e^{i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{1-e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}}{2i\sin\frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} \Re\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Retour à Khôlle 4 : Trigonométrie.

2.5 Correction Khôlle 5 : Trigonométrie

Retour à Khôlle 5 : Trigonométrie.

Exercise 2.13 (Question de cours)**.** Soit x le nombre en question. On a :

$$
\begin{aligned}
x &= 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}) \\
&= 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8}) \\
&= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8})^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 2\left(1^2 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Exercise 2.14 (Problème principal)**.** Nommons (E) l'équation à résoudre :

$$\begin{aligned}
&(E)\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x} + 16 \times 2^{-4\cos^2 x} - 10 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(2^{4\cos^2 x}\right)^2 - 10 \times 2^{4\cos^2 x} + 16 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x} \textit{ est solution de } X^2 - 10X + 16 = 0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x} \in \{2; 8\}\\
\Leftrightarrow\ & \cos x \in \{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

Exercise 2.15 (Question subsidiaire)**.** Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \sin 2x \ &\Leftrightarrow\ \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\\
&\Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \pm 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\cos 3x = \sin 2x \ &\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x \cos x\\
&\Leftrightarrow\ \cos x = 0 \ \text{ ou } \ -4\cos^3 x + 3 + 2\sin x = 0\\
&\Leftrightarrow\ \cos x = 0 \ \text{ ou } \ 4\sin^2 x - 1 + 2\sin x = 0
\end{aligned}$$

Donc $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{13\pi}{10}$ sont solutions de $4X^2 + 2X - 1 = 0$ (car leur cosinus est non nul). Or les racines de $4X^2 + 2X - 1$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\sin\frac{3\pi}{10} = -\sin\frac{13\pi}{10}$ et avec une étude de signe, on trouve finalement :

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis (attention à justifier le signe par un cercle trigonométrique) :

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Pour compléter le tableau, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ \text{ et }\ \cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Retour à Khôlle 5 : Trigonométrie.

2.6 Correction Khôlle 6 : Logique

Retour à Khôlle 6 : Logique.

Exercise 2.16 (Question de cours)**.** L'assertion n'est certainement pas vraie pour un prédicat quelconque, cependant, elle est vraie pour certains prédicats (ceux pour lesquels on a $p(y,y)$).

Exercise 2.17 (Problème principal)**.** On écrit sous forme réduite $H_2=\frac{3}{2}$. Le numérateur est impair et le dénominateur est pair. On va montrer par récurrence (forte) que H_n s'écrit sous forme réduite $H_n=\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair.

⋆ Supposons que n soit pair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors $H_n=\frac{np_{n-1}+q_{n-1}}{nq_{n-1}}$. Alors H_n s'écrit sous forme réduite $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car la facteur 2 du dénominateur nq_{n-1} ne se simplifie pas avec le numérateur $np_{n-1}+q_{n-1}$.

⋆ Supposons que $n=2k-1$ soit impair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors :

$$H_n=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}=\frac{1}{2}H_k+\frac{P}{Q}$$

où la deuxième fraction est sous forme réduite avec Q impair (car on somme des fractions de dénominateur impair) et P le nombre qui convient (peu importe sa valeur exacte).

Ensuite, $H_k=\frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair par hypothèse de récurrence. Finalement :

$$H_n=\frac{Qp_k+2Pq_k}{2Qq_k}$$

De la même manière que précédemment, en réduisant la fraction, on trouve bien $H_n=\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car Qp_k+2Pq_k est impair et $2Qq_k$ est pair.

Ainsi, on a montré par récurrence que H_n ne peut jamais être un entier pour $n\geq 2$ car son dénominateur est pair alors que son numérateur est impair.

Exercise 2.18 (Question subsidiaire)**.** Raisonnons par récurrence **forte** pour montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

Pour n premier, c'est évident : $n|n$. En particulier, l'initialisation est validée avec $n=2$.

Fixons n et supposons que notre hypothèse soit vérifiée pour tout $1 < k < n$. Si n n'est divisible par aucun $k \in [2, n-1]$, alors n est premier, donc $n|n$ garantit que n est bien divisible par un nombre premier. Sinon, il existe $k \in [2, n-1]$ tel que $k|n$, or, par hypothèse de récurrence, il existe p premier tel que $p|k$. Par transitivité (de la divisibilité) : $p|n$.

Finalement, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

Retour à Khôlle 6 : Logique.

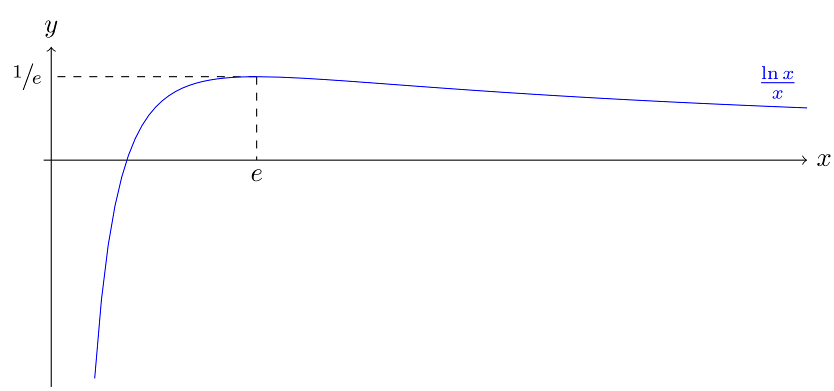
2.7 Correction Khôlle 7 : Étude de fonctions, ln

Retour à Khôlle 7 : Étude de fonctions, ln.

Exercise 2.19 (Question de cours)**.** Toute fonction f continue et strictement monotone réalise une bijection entre son ensemble de départ et celui d'arrivée. Sa réciproque est aussi une bijection continue de même (stricte) monotonie.

Des fonctions comme $f : x \mapsto x - E(x)$ sont strictement croissantes mais pas continues. Elles ne mettent pas en bijection leur ensemble de départ et d'arrivée.

Exercise 2.20 (Problème principal)**.** La fonction est définie, continue et dérivable comme quotient de fonctions sur $]0; +\infty[$. On a pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Donc, f est croissante avant e et décroissante après. Elle atteint son maximum global en e, de valeur $f(e) = e^{-1}$. On a aussi les limites : $\lim_0 f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0^+$. D'où le tableau et le graphe qui vont bien.



Supposons que $a^b = b^a$ avec a, b des entiers naturels (non-nuls) et $a < b$ (le cas $a = b$ fournissant bien évidemment une solution). Alors $\ln a^b = \ln b^a$, et il s'ensuit $f(a) = f(b)$. En appliquant le théorème de la bijection pour f sur $I :=]0, e]$ et $J := [e, +\infty[$, on en déduit que a et b ne peuvent pas être tous les deux dans I ou tous les deux dans J, donc $a \leq e$. De fait, $a \in \{1; 2\}$ et il y a au plus 1 $b \neq a$ tel que $f(b) = f(a)$. Finalement, on traite les deux cas à la main :

1. $\underline{a = 1}$, alors $f(a) = 0$ et il est impossible de trouver b (sinon, on aurait $\ln b = 0$, or $b > e$).

2. $\underline{a=2}$, alors $b=4$ convient.

Finalement, les couples solutions de l'équation $a^b = b^a$ avec a et b naturels sont $\{(a,a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,4); (4,2)\}$.

Exercise 2.21 (Question subsidiaire)**.** Plusieurs approches possibles. Par exemple on peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}
& 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} && = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3}{2} 2^{2x} && = \frac{4\sqrt{3}}{3} 3^x \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{4}{3}\right)^x && = \frac{8}{3\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & x && = \frac{\ln 8 - \ln 3\sqrt{3}}{\ln 4 - \ln 3} \\
\Leftrightarrow \quad & x && = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que $\frac{3}{2}$ est solution (parce que cela revient à écrire la décomposition de 12 en bases 2 et 3), puis montrer que l'équation n'a qu'une seule solution.

Retour à Khôlle 7 : Étude de fonctions, ln.

2.8 Correction Khôlle 8 : Puissances, exp

Retour à Khôlle 8 : Puissances, exp.

Exercise 2.22 (Question de cours)**.** L'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme. Pour tout α, β strictement positifs :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$$

On en déduit, grâce à $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, que la limite est $+\infty$ si $\alpha > 1$, 0 sinon.

Exercise 2.23 (Problème principal)**.** On repasse en forme exponentielle : $(x^x)^x = e^{x^2 \ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$. De fait, on doit regarder $(x^2 - x^x) \ln x$ $(= x^2(1 - x^{x-2}) \ln x)$.

— $\underline{x \to +\infty :}$ Si $x > 2$, alors l'expression est négative, et elle tend vers $-\infty$ (comme produit). Donc $\lim_{+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$.

— $\underline{x \to 0 :}$ On a (formellement) $(0-1) \times -\infty$. On trouve $\lim_0 \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = +\infty$.

Exercise 2.24 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\tanh x + \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sinh^2 x + \cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) + \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)}{\frac{1}{4}\quad e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{2\cosh 2x}{\sinh 2x}$$

La somme demandée est alors une somme télescopique, et on trouve :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k \times 2}{\tanh(2^k \times 2x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} \right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

Il s'ensuit que, pour $x \neq 0$, $\lim_{+\infty} u_n(x) = +\infty$ (pour $x = 0$, on a évidement $\forall n, u_n(0) = 0$).

Retour à Khôlle 8 : Puissances, exp.

2.9 Correction Khôlle 9 : Étude de fonction

Retour à Khôlle 9 : Étude de fonction.

Exercise 2.25 (Question de cours)**.** Soit f et g deux fonctions dérivables et compatibles pour la composition. Alors la composée $f \circ g$ est dérivable (sur le bon ensemble), et :

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

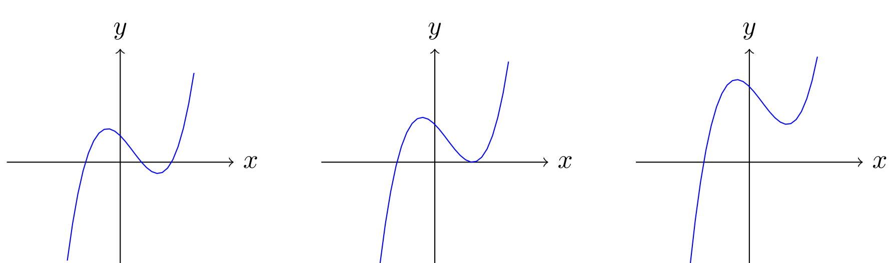
Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha^x := e^{x \ln \alpha}$. On déduit de la formule précédente avec $f := exp$ et $g : x \mapsto x \ln \alpha$ que la dérivée de $h : x \mapsto \alpha^x$ est :

$$h'(x) = \ln \alpha \times e^{x \ln \alpha} = \ln \alpha \times \alpha^x$$

Exercise 2.26 (Problème principal)**.** On cherche ici à construire un nombre qui se calcule à partir de p et q et dont un simple regard sur le signe nous donnerait le nombre de racines réelles du polynôme $P = X^3 + pX + q$. On remarque tout d'abord que :

$$\left(\lim_{x \to +\infty} P(x) \right) \times \left(\lim_{x \to -\infty} P(x) \right) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires/théorème de bijection, la fonction polynomiale P (qui est continue) s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc P a 1 ou 3 racines sur $\mathbb{R}$. **Faites un dessin !**



En dérivant, on a : $P' = 3X^2 + p$, donc la fonction polynomiale P atteint ses extrêma en $\alpha := -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $\beta := +\sqrt{\frac{-p}{3}}$, **qui sont réels à la condition** $p \leq 0$. On regarde alors les valeurs prises par P en ces abscisses, et surtout leur produit :

$$\begin{aligned}
P(\alpha)P(\beta) &= (q - \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2))(q + \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2)) \\
&= q^2 - \sqrt{-p/3}^2(\frac{2}{3}p)^2 \\
&= \frac{1}{27}\Delta_3
\end{aligned}$$

Où on a fixé le discriminant du polynôme de degré 3, $X^3 + px + q$:

$$\Delta_3 = 27q^2 + 4p^3$$

Ainsi, le simple calcul de ce nombre nous permet d'étudier le signe de $P(\alpha)P(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine entre ces extrêma si ledit produit est négatif. La réciproque se montre simplement en établissant le tableau de variation de la fonction polynomiale P.

Attention cependant, ici, c'est lorsque qu'on a $\Delta_3 < 0$ que le polynôme a 3 racines réelles ! Inversement, lorsque $\Delta_3 > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle, et pour $\Delta_3 = 0$, il y a une racine simple et une double (mais on ne peut dire laquelle est laquelle sans pousser plus loin l'analyse).

Remark. La condition "$p < 0$" est bien induite par "$\Delta_3 < 0$", il n'est donc pas nécessaire de la vérifier en plus.

Exercise 2.27 (Question subsidiaire)**.** On regarde les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$(\ln f)'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc f est croissante sur $]0; e]$ puis décroissante sur $]e; +\infty[$. On en déduit que le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est atteint pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Reste à savoir si $\sqrt{2}$ est plus grand que $\sqrt[3]{3}$ ou le contraire. Or on a :

$$(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$$

Ainsi : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\} = \sqrt[3]{3}$.

Exercise 2.28 (Question subsidiaire)**.** Utilisez $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sinh^2 - \cosh^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\sinh^2\cos^2 + \cosh^2\sin^2 &= \sinh^2\cos^2 + (1 + \sinh^2)\sin^2 \\
&= \sinh^2(\cos^2 + \sin^2) + \sin^2 \\
&= \sinh^2 + \sin^2
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 9 : Étude de fonction.

2.10 Correction Khôlle 10 : Étude de fonction, ln

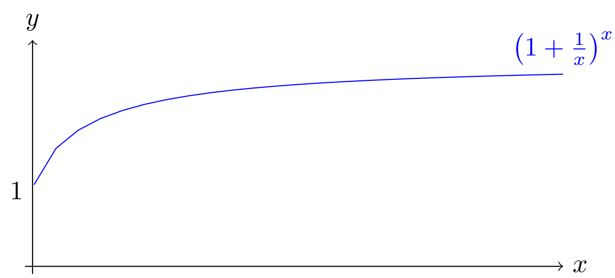
Retour à Khôlle 10 : Étude de fonction, ln.

Exercise 2.29 (Question de cours)**.** **Pour que** $\ln f$ **soit définie, il faut que** $f > 0$**!** Supposons $\ln f$ définie et dérivable, et f dérivable. Alors on a : $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$, donc, comme $f > 0$, on en déduit que $(\ln f)'$ et f' ont le même signe (strictement). Ainsi, les monotonies (possiblement strictes) de $\ln f$ et de f sont les mêmes.

Exercise 2.30 (Problème principal)**.** Domaine de définition de f : $\mathbb{R}_+^*$, dérivable dessus (car $1 + \frac{1}{x} > 0$).

$\lim_0 f(x) = 1$ et $\lim_{+\infty} f(x) = e$. Il faut passer par le logarithme et les théorèmes de croissances comparées.

$(\ln f)'(x) = f(x) \left(\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right)$. La partie de droite est une fonction décroissante (de dérivée $\frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$) de limite 0 en $+\infty$, donc positive strictement. Ainsi, f est strictement croissante.



Exercise 2.31 (Question subsidiaire)**.** Attention, l'expression n'est définie que pour $x \notin \{\frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 1\}$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 10}(\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10)) &= \frac{\ln 10x \ln 100x + 2\ln x \ln 100x + 3\ln x \ln 10x}{(\ln x)(\ln 10x)(\ln 100x)} \\ &= \frac{6(\ln x)^2 + (3+4+3)\ln 10(\ln x) + 2(\ln 10)^2}{(\ln x)(\ln x + \ln 10)(\ln x + 2\ln 10)}\end{aligned}$$

On cherche les racines d'un trinôme avec $a = 6$, $b = 10 \ln 10$ et $c = 2\ln^2 10$. On a (avec $b' = b/2$) $\Delta' = 13 \ln^2 10 > 0$ et donc $\ln x \in \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6} \ln 10; \frac{-5+\sqrt{13}}{6} \ln 10\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} := \{10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}; 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\}$$

Retour à Khôlle 10 : Étude de fonction, ln.

2.11 Correction Khôlle 11 : Trigonométrie et étude de fonctions

Retour à Khôlle 11 : Trigonométrie et étude de fonctions.

Exercise 2.32 (Question de cours)**.** On rappelle les définitions :

$$f^+ : x \mapsto \max(0, f(x))$$
$$f^- : x \mapsto \max(0, -f(x))$$

On en déduit : $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$. En inversant le système : $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

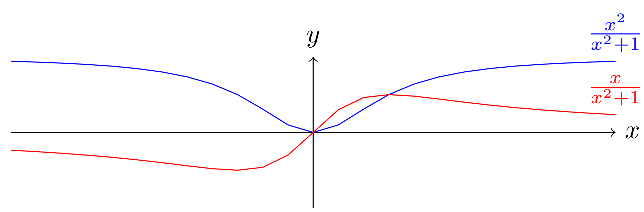
Exercise 2.33 (Problème principal)**.** Preuve par récurrence avec les formules d'addition. Cas d'égalité qui se voit dans la récurrence.

$$\begin{aligned}
|\sin(nx)| &= |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| && (Formule\ d'addition)\\
&\leq |\sin(nx)||\cos x| + |\cos(nx)||\sin x| && (Inegalite\ triangulaire)\\
&\leq |\sin(nx)| + |\sin x| && (|\cos x| < 1)\\
&\leq n|\sin x| + |\sin x| && (Hypothese\ de\ recurrence)\\
&\leq (n+1)|\sin x|
\end{aligned}$$

Donc le cas d'égalité intervient quand, d'une part, $|\cos x| = 1$, ce qui induit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\sin x = 0$ et $\sin(nx) = 0$, ce qui est bien une égalité.

Exercise 2.34 (Question subsidiaire)**.** Sur $\mathbb{R}$, $x^2 + 1$ est toujours non nul, donc les fonctions sont bien définies. En outre, leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont finies (0 et 1), donc elles sont bornées. Par contre, n'ayant pas encore de tel théorème sur les fonctions continues, il faudra le justifier proprement.

Sinon, on peut faire le calcul à la main et montrer que $0 \leq f < 1$ et $|g| \leq \frac{1}{2}$. On finira par des tracés de graphes. Les tableaux de variation serviront à justifier du caractère borné.



Exercise 2.35 (Question subsidiaire)**.** Avec la méthode des limites, on obtient que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ (on suppose que P et Q n'ont pas de racines communes) est bornée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

- Q n'a pas de racines dans I (et que Q ne s'annule pas aux bords de I).
- Si $\pm\infty \in I$, alors $\deg P \leq \deg Q$.

Retour à Khôlle 11 : Trigonométrie et étude de fonctions.

2.12 Correction Khôlle 12 : Étude de fonctions, ln

Retour à Khôlle 12 : Étude de fonctions, ln.

Exercise 2.36 (Question de cours)**.** Voici ce qu'on peut dire en première approche :

- La somme de deux fonctions de même monotonie est de cette monotonie (et si l'une au moins est stricte, la somme est stricte).
- Le produit de deux fonctions de même monotonie et **positives** est de cette monotonie (stricte si l'une au moins est stricte).
- La composée de deux fonctions monotones, lorsqu'elle existe, est croissante si les deux fonctions sont de même monotonie, décroissante sinon.

Exercise 2.37 (Problème principal)**.** L'expression est correctement définie pour $x \in]0;1[$, elle est positive. On calcul donc $\ln f$ et on en établit le tableau de variation.

$$\ln f(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x)$$

$\ln f$ est dérivable comme somme et produit :

$$(\ln f)'(x) = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln \frac{x}{1-x} = -\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

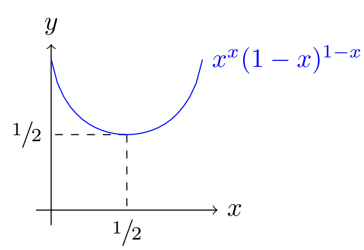
Donc $\ln f$ et par là même f est strictement décroissante sur $]0;1/2]$ puis strictement croissante sur $[1/2;1[$. Elle atteint un minimum global en $\frac{1}{2}$ qui vaut :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

On peut remarquer que f est laissé inchangée par l'opérateur $f(.) \mapsto f(1-.)$, donc son graphe admet un axe de symétrie vertical en $x = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, on peut calculer les limites de f en 0 et en 1.

- $\lim_0 \ln f(x) = 0 + (1-0) \times 0 = 0$ donc $\lim_0 f(x) = 1$.
- Par symétrie, $\lim_1 f(x) = 1$.



Exercise 2.38 (Question subsidiaire)**.** Avec des exponentielle, on obtient que $x \in \mathbb{R}$ vérifie $a\cosh x + b\sinh x = c$ si et seulement si e^x est racine du polynôme $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b)$. Cela donne lieu à plein de disjonctions de cas !

Retour à Khôlle 12 : Étude de fonctions, ln.

2.13 Correction Khôlle 13 : Ensembles

Retour à Khôlle 13 : Ensembles.

Exercise 2.39 (Question de cours)**. Surtout, surtout, faites des dessins pour expliquer vos dires !** Ils ne sont pas suffisants pour faire des démonstrations (il faudrait pour cela repartir des définitions), mais le khôlleur ne vous demandera probablement pas de démontrer formellement ce que vous avancez sur les propriétés de base de l'union, l'intersection et le "privé de" s'il voit que vous êtes clair et sûr de vous.

Le tableau que vous devez ressortir est le suivant (on prend deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E possédant un élément x) :

	Union	Intersection	Privé de
Symbole $\star$	$\cup$	$\cap$	$\setminus$
$x \in A \star B \iff$	$x \in A$ ou $x \in B$	$x \in A$ et $x \in B$	$x \in A$ et $x \notin B$
Associatif	oui	oui	non
Commutatif	oui	oui	non
Élément neutre	oui : $\emptyset$	oui : E	à droite : $\emptyset$
Inverses	non	non	à droite : $A^{-1} = A$
Distributivité	sur $\cap$	sur $\cup$	formule de De Morgan

Exercise 2.40 (Problème principal)**.** Le calcul est très casse-pied, mais vous pouvez faire un dessin !

Le justifier proprement est formateur, et je ne vous mâcherai pas le travail en le faisant ici. Il s'agit de vérifier que $A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité), puis $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (associativité), puis $A\Delta\emptyset = A$ (élément neutre : $\emptyset$), et enfin $A\Delta A = \emptyset$ (inverse : $A^{-1} = A$).

Ici, il faut trouver que :

$$\begin{aligned}
A\Delta(B \cup C) &= (A\Delta B) \cup (A\Delta C)\\
A\Delta(B \cap C) &\neq (A\Delta B) \cap (A\Delta C)\\
A \cup (B\Delta C) &\neq (A \cup B)\Delta(A \cup C)\\
A \cap (B\Delta C) &= (A \cap B)\Delta(A \cap C)
\end{aligned}$$

Exercise 2.41 (Question subsidiaire)**.** Cf exercise 1.38.

Retour à Khôlle 13 : Ensembles.

2.14 Correction Khôlle 14 : Binôme de Newton

Retour à Khôlle 14 : Binôme de Newton.

Exercise 2.42 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.43 (Problème principal)**.** On utilise la forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\sum_k \binom{n}{k}\cos(k\theta) &= \Re\left(\sum_k \binom{n}{k}(e^{\theta})^k 1^{n-k}\right)\\ &= \Re\left((1+e^{\theta})^n\right)\\ &= \Re\left(2^n\cos^n\frac{\theta}{2}e^{\frac{in\theta}{2}}\right)\\ &= 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercise 2.44 (Question subsidiaire)**.** On pose $u_k = \binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. On regarde $\frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}$$

On a donc 3 cas.

1. $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (i.e. $n < \frac{a}{b}$), alors $(u_k)_k$ est croissante et le terme dominant est a^n.
2. $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (i.e. $n \leq \frac{b}{a}$), alors $(u_k)_k$ est décroissante et le terme dominant est b^n.
3. Sinon, $(u_k)_k$ est unimodale (croissante puis décroissante), et le terme dominant est celui d'indice $k_0 = E\left(\frac{na-b}{a+b}\right) + 1$.

Exercise 2.45 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\tanh x + \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sinh^2 x + \cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{2\cosh 2x}{\sinh 2x}$$

La somme demandée est alors une somme télescopique, et on trouve :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k \times 2}{\tanh(2^k \times 2x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)}\right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

Il s'ensuit que, pour $x \neq 0$, $\lim_{+\infty} u_n(x) = +\infty$ (pour $x = 0$, on a évidement $\forall n, u_n(0) = 0$).

Retour à Khôlle 14 : Binôme de Newton.

2.15 Correction Khôlle 15 : Fonctions hyperboliques, sommes

Retour à Khôlle 15 : Fonctions hyperboliques, sommes.

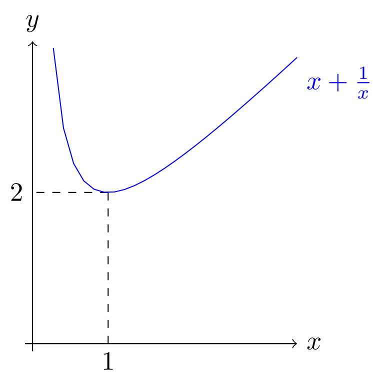
Exercise 2.46 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.47 (Problème principal)**.** Pour $x = 0$, la somme vaut $100 \sinh 2 \neq 0$. Supposons $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{100} \sinh(2 + kx) &= \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_k e^{kx} - e^{-2} \sum_k e^{kx}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+2} \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^{-x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1 - e^{100x}}{1 - e^x} - e^{-2} \frac{1 - e^{-100x}}{1 - e^x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut raisonner par équivalence : $S = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2}$. Donc l'ensemble de solution est $\mathcal{S} = \{\frac{-4}{101}\}$.

Exercise 2.48 (Question subsidiaire)**.** On étudie la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est toujours supérieure à 2. Ensuite, on a :



$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_i \frac{a_i}{a_i} + 2 \sum_{i<j} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \\ &\geq n + 2 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &\geq n^2 \end{aligned}$$

Exercise 2.49 (Question subsidiaire)**.** On regarde le membre de droite de l'inégalité équivalente : $n^n < (n!)^2$. On a :

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{j=1}^{n} (n - j + 1)$$

Donc le terme diagonal de $k(n - j + 1)$ (c'est-à-dire quand $k = j$) étant toujours supérieur à n (car l'un des deux l'est alors que l'autre est ≥ 1), donc par produit, on obtient l'inégalité souhaitée.

Retour à Khôlle 15 : Fonctions hyperboliques, sommes.

2.16 Correction Khôlle 16 : Ensembles, polynôme de degré 3

Retour à Khôlle 16 : Ensembles, polynôme de degré 3.

Exercise 2.50 (Question de cours)**.** Si $E = F$, alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Réciproquement, si $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$, alors comme $E \in \mathcal{P}(E)$, on a $E = \mathcal{P}(F)$, donc $E \subset F$. Inversement, $F \subset E$, et finalement $E = F$.

Exercise 2.51 (Problème principal)**.** Cf exercise 1.26.

Exercise 2.52 (Question subsidiaire)**.** La première expression est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la seconde sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}) = 1$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}^2 - x^2\right) = \ln(1) = 0$$

Retour à Khôlle 16 : Ensembles, polynôme de degré 3.

2.17 Correction Khôlle 17 : Relations binaires, ln

Retour à Khôlle 17 : Relations binaires, ln.

Exercise 2.53 (Question de cours)**.** Relation d'ordre : réflexivité + anti-symétrie + transitivité (la relation d'inclusion vérifie bien ces 3 critères)

Relation d'équivalence : réflexivité + symétrie + transitivité.

Décroissance du complémentaire : On a bien : $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercise 2.54 (Problème principal)**.** L'inégalité est équivalente avec $(x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2$ *et* $x \neq 1$ *et* $x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble de solution est (on le dessinera sur un axe réel) :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]-1; -3/5] \cup [-1/3; +\infty[$$

Exercise 2.55 (Question subsidiaire)**.** Il faut faire attention à ce que $x, y \neq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $\ln xy = 1$, donc $\ln y = 1 - \ln x$. On remplace dans la première expression : $2\frac{1-\ln x}{\ln x} + 2\frac{\ln x}{1-\ln x} = -5$. Ainsi, on obtient $2(1 - \ln x)^2 + 2\ln^2 x = -5\ln x(1 - \ln x)$ et finalement $-\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$, soit $(\ln x + 1)(-\ln x + 2) = 0$. Ainsi, $(x, y) = (e^2, e^{-1}$ et $(x, y) = (e^2, e^{-1})$ sont les seules possibilités (et elles fonctionnent).

Exercise 2.56 (Question subsidiaire)**.**

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\frac{1}{2}x\ln x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = \frac{1}{2}x\ln x \\ &\Leftrightarrow (x = 1) \text{ } ou \text{ } (x = 2\sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow (x = 1) \text{ } ou \text{ } (x = 4) \end{aligned}$$

Retour à Khôlle 17 : Relations binaires, ln.

2.18 Correction Khôlle 18 : Ensembles

Retour à Khôlle 18 : Ensembles.

Exercise 2.57 (Question de cours)**.** On a :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= \{(x,c); (x \in A \ ou \ x \in B) \ et \ c \in C\} \\ &= \{(a,c); a \in A \ et \ c \in C\} \cup \{(b,c); b \in B \ et \ c \in C\} \\ &= (A \times C) \times (B \times C)\end{aligned}$$

Exercise 2.58 (Problème principal)**.** Soit $j \in I$ et $X \subset I$. On va montrer que $(A_j \cap B_j) \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

— Si $j \in X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset A_j \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

— Si $j \notin X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset B_j \subset \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i\right)$.

Finalement, on a bien :

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right)$$

Étudions l'inclusion réciproque. Pour $X = \emptyset$ puis $X = I$, on obtient :

$$\bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in I} A_j \right) = \bigcup_{i,j \in I} (A_i \cap B_j)$$

Or si $i \neq j$, on peut construire $X \in \mathcal{P}(I)$ tel que $i \notin X$ et $j \in X$. Si $x \in (A_i \cap B_j)$ et $x \notin A_k$ (pour $k \neq i$), $x \notin B_k$ (pour $k \neq j$), alors $x \notin \left(\bigcup_{k \in X} A_k \cup \bigcup_{k \notin X} B_k\right)$. Ainsi, on obtient bien :

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \supset \bigcap_{X \subset I} \left(\bigcup_{i \in X} A_i \cup \bigcup_{i \notin X} B_i \right)$$

On a finalement l'égalité souhaitée.

Exercise 2.59 (Question subsidiaire)**.** On a $e^x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$, donc en inversant : $\tan\frac{y}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \tanh\frac{x}{2}$. Ensuite, on peut montrer que :

$$\tanh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \sin y$$

Finalement, $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. En remarquant que si $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) > 0$ (ce qui est le cas car on a passé cette expression au logarithme), alors $\cos y > 0$, on conclut.

Retour à Khôlle 18 : Ensembles.

2.19 Correction Khôlle 19 : Trigonométrie réciproque, Dérivation

Retour à Khôlle 19 : Trigonométrie réciproque, Dérivation.

Exercise 2.60 (Question de cours)**.** Soit f une fonction bijective $I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Si f est dérivable sur I. Alors f^{-1}, la fonction réciproque de f est aussi une bijection dérivable là où $f'(x) \neq 0$ et on a $f'(x){f^{-1}}'(x) = 1$.

Exercise 2.61 (Problème principal)**.** (On dérive par composition, d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$. On pose $f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, f est constante sur les intervalles où elle est définie, et en testant pour $x = -1$ et $x = 1$, on obtient l'égalité voulue.)

On procède de même avec la fonction $g : x \mapsto \arctan(e^x) - \arctan(\tanh \frac{x}{2})$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable par composition. On a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^x \frac{1}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}\frac{1}{1+\tanh^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\frac{1}{4}(2e^x + 2e^{-x})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$, et on a d'ailleurs $g(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 2.62 (Question subsidiaire)**.** On pose $T(x) = \sum_{k=0}^{n} f(kx+b)$. Comme la somme est finie, on peut dériver terme à terme et on obtient : $S(x) = T'(x)$. Par exemple, on peut avoir : $T(x) = \sum_{k=0}^{n} \cosh(kx)$. On peut alors calculer la somme de l'énoncé en dérivant. On a :

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^x)^k + \sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} + \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right)
\end{aligned}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$. On a :

$$f'(x) = \frac{-(n+1)e^{(n+1)x}(1-e^x) + e^x(1-e^{(n+1)x})}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x}}{(1-e^x)^2}$$

Donc avec $g : x \mapsto f(-x)$, on a $g'(x) = -f'(-x) = -\frac{e^{-x} - (n+1)e^{-(n+1)x} + ne^{-(n+2)x}}{(1-e^{-x})^2}$.

On obtient : $T(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$, donc :

$$S(x) = T'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x}}{(1-e^x)^2} - \frac{e^{-x} - (n+1)e^{-(n+1)x} + ne^{-(n+2)x}}{(1-e^{-x})^2}\right)$$

Retour à Khôlle 19 : Trigonométrie réciproque, Dérivation.

2.20 Correction Khôlle 20 : Dérivation, Trigonométrie réciproque

Retour à Khôlle 20 : Dérivation, Trigonométrie réciproque.

Exercise 2.63 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.64 (Problème principal)**.** En dérivant, on obtient les tableaux de variation, et les inégalités souhaitées.

Exercise 2.65 (Question subsidiaire)**.** Premièrement, $0 \leq \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{1/2 + 1/5}{1 - 1/2 \times 1/5} = \frac{7}{9}$$

De la même manière, $0 \leq \arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\tan\left(\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \frac{7/9 + 1/8}{1 - 7/9 \times 1/8} = \frac{65}{65} = 1$$

Finalement : $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 2.66 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.44.

Retour à Khôlle 20 : Dérivation, Trigonométrie réciproque.

2.21 Correction Khôlle 21 : Relation d'ordre

Retour à Khôlle 21 : Relation d'ordre.

Exercise 2.67 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.68 (Problème principal)**.** $\mathcal{T}$ hérite de la réflexivité et de la transitivité de $\mathcal{R}$. Pour ce qui est de la symétrie, elle vient de la commutativité de $\wedge$.

Soient X et Y tels que $X\mathcal{S}Y$. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ tels que $x_0\mathcal{R}y_0$. Alors, on sait que $x\mathcal{T}x_0$, donc $x\mathcal{R}x_0 \wedge x_0\mathcal{R}x$. Par transitivité, on a en particulier $x\mathcal{R}y_0$. Pareillement : $y\mathcal{R}y_0 \wedge y_0\mathcal{R}y$ et en particulier $y_0\mathcal{R}y$. Ainsi, par transitivité, $x\mathcal{R}y$.

$\mathcal{S}$ est réflexif (trivial) ; anti-symétrique car si $X\mathcal{S}Y \wedge Y\mathcal{S}X$, alors $\forall x, y \in X \times Y, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ (i.e. $x\mathcal{T}Y$), donc $X = Y$ (comme classes d'équivalence modulo $\mathcal{T}$) ; et transitive (héritage de $\mathcal{R}$). C'est bien une relation d'ordre.

Exercise 2.69 (Question subsidiaire)**.** La relation $\mathcal{R} = |$ est bien un pré-ordre sur $\mathbb{Z}$ (attention, c'est un ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$).

On obtient $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow |x| = |y|$ et donc les classes d'équivalence $\mathcal{C}(x) = \{-x, x\}$ (pour $x \in \mathbb{Z}$).

On obtient $\mathcal{C}(x)\mathcal{S}\mathcal{C}(y)$ qui est bien une relation d'ordre car on a levé l'ambiguïté qui empêchait $|$ d'être anti-symétrique. On peut voir en fait que les classes d'équivalences de $\mathcal{T}$ sont paramétrées de manière unique par les entiers naturels. Formellement, on a la bijection $\psi : X \mapsto \max_{x\in X} x$ dont la réciproque est $\varphi : x \mapsto \mathcal{C}(x)$. φ est croissante pour les relations $|$ et $\mathcal{S}$. Inversement, on peut dire que $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \psi(X)|\psi(Y)$.

On aurait pu procéder de même avec la divisibilité dans les polynômes, les matrices, où avec plein d'autres pré-ordres.

Retour à Khôlle 21 : Relation d'ordre.

2.22 Correction Khôlle 22 : Trigonométrie réciproque, Sommes

Retour à Khôlle 22 : Trigonométrie réciproque, Sommes.

Exercise 2.70 (Question de cours)**.** Soient $u : I \to J$ et $v : K \to L$ où I, J, K et L sont des intervalles, avec $u(I) \subset K$ et u et v dérivables sur leurs ensembles de définition. Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I avec : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Exercise 2.71 (Problème principal)**.** Il faut démontrer la formule de sommation des arctan (en dérivant). Pour $x, y \in [0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\arctan \frac{x+y}{1-xy} = \arctan x + \arctan y$$

Dès lors, on constate que (comme arctan est impaire) :

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$$

On obtient une somme télescopique sur 2 rangs, puis le terme général de la suite.

Exercise 2.72 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.24.

Retour à Khôlle 22 : Trigonométrie réciproque, Sommes.

2.23 Correction Khôlle 23 : Sommes, Relations binaires

Retour à Khôlle 23 : Sommes, Relations binaires.

Exercise 2.73 (Question de cours)**.** Pour un ensemble E muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on appelle classe d'équivalence sous $\mathcal{R}$ (ou modulo $\mathcal{R}$) les ensembles $\mathcal{C}(x) = \{y \in E; x\mathcal{R}y\}$ pour $x \in E$. L'ensemble des classes d'équivalences forment une partition de E, c'est-à-dire que :

- $\cup_{x\in E}\mathcal{C}(x) = E$
- Si $\mathcal{C}(x)\cap\mathcal{C}(y)\neq\emptyset$, alors $\mathcal{C}(x)=\mathcal{C}(y)$

On peut démontrer cela grâce aux propriétés de $\mathcal{R}$:

— Soit $y\in E$, alors, par réflexivité $y\in\mathcal{C}(y)$, donc $y\in\cup_{x\in E}\mathcal{C}(x)$, d'où : $\cup_{x\in E}\mathcal{C}(x)\subset E$ (l'autre inclusion étant évidente).

— Si $\mathcal{C}(x)\cap\mathcal{C}(y)\neq\emptyset$, alors on a un élément $z\in\mathcal{C}(x)\cap\mathcal{C}(y)$, i.e. $z\mathcal{R}y$ et par transitivité, $\forall\tilde{x}\in\mathcal{C}(x),\tilde{x}\mathcal{R}y$, donc $\mathcal{C}(x)\subset\mathcal{C}(y)$. Par symétrie, on conclut.

Exercise 2.74 (Problème principal)**.** On trouve $P=\frac{1}{30}X(X-1)(6X^3-9X^2+x+1)$, donc $\sum_k k^4 = P(n+1)-P(1) =: Q(n)$ avec $Q=\frac{1}{30}X(X+1)(6X^3+9X^2+X-1)$.

Dès lors

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n^5}\left(\sum_{k,h=1}^{n} 5h^4-18h^2k^2+5k^4\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\left(5\sum_{k,h}h^4-18\sum_{k,h}h^2k^2+5\sum_{k,h}k^4\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\left(5nQ(n)-18\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2+5nQ(n)\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\left(2\times5\times6\times\frac{1}{30}n^6-18\times2^2\times\frac{1}{6^2}n^6+n^5\left(\frac{15}{3}-\frac{12}{2}\right)+O(n^4)\right)\\
&\to -1
\end{aligned}$$

Exercise 2.75 (Question subsidiaire)**.** On a $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow\sin^2 x=\sin^2 y$. La relation est donc bien réflexive, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de x est $\mathcal{C}(x)=(x+\pi\mathbb{Z})\cup((\pi-x)+\pi\mathbb{Z})$. **Un dessin est le bienvenu !**

La relation $\mathcal{S}$ est réflexive, transitive et anti-symétrique : c'est une relation d'ordre. Pour prouver qu'elle est ant-symétrique, on regarde les fonctions $f_{p,q}$: $x\mapsto px^q$. Elles sont strictement croissantes sur $[1;+\infty[$ si et seulement si p ou $q>1$. Par contraposée, si $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et $x,y\geq1$, alors $x=y$. On peut raisonner de même dans $]-\infty;-1]$. Pour combiner les deux, on se rend compte qu'il est impossible que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ avec $x<-1$ et $y>1$ car si $y\mathcal{S}x$ et $y\geq0$, alors $x\geq0$. Cette relation n'a ni minorant, ni majorant (même si on la restreint à $]-\infty;-1]$ ou à $[1;+\infty)$, elle est partielle, et même pour tout élément x, on peut trouver un élément y tel que ni $x\mathcal{S}y$, ni $y\mathcal{S}x$. Comme ${}^1\!/_2=2\times{}^1\!/_4$ et ${}^1\!/_4=({}^1\!/_2)^2$, $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique sur $\mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 23 : Sommes, Relations binaires.

2.24 Correction Khôlle 24 : Ensembles, Trigonométrie réciproque

Retour à Khôlle 24 : Ensembles, Trigonométrie réciproque.

Exercise 2.76 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.77 (Problème principal)**.** On a :

- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.
- $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors si $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$, donc $x \in B$, on a : $A \subset B$. Par symétrie, on a $A = B$. La réciproque est évidente.

On montre que les fonctions indicatrices de $A\cap(B\Delta C)$ et de $(A\Delta B)\cap(A\Delta C)$ pour en montrer l'égalité. Or on a (on utilise $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$) :

$$\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C)$$

Ainsi, $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$, ce qui montre la distributivité de $\cap$ sur Δ.

De même :

$$\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_C \mathbb{1}_B + 4\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$$

On obtient une formule symétrique, on en déduit que Δ est associative.

Exercise 2.78 (Question subsidiaire)**.** Comme somme de fonctions strictement croissante, la fonction $x \mapsto \arcsin x \arcsin \frac{x}{2}$ est strictement croissante et réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0; \frac{2\pi}{3}]$. L'équation a donc un unique solution. Or, dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$, il y a un seul argument tel que son sinus vaut $\sin \frac{\pi}{4} (= \frac{1}{\sqrt{2}})$. On peut donc raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \sin\left(\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow ... \\
&\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}}
\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 24 : Ensembles, Trigonométrie réciproque.

2.25 Correction Khôlle 25 : Applications, Relations

Retour à Khôlle 25 : Applications, Relations.

Exercise 2.79 (Question de cours)**.** Pour $f : E \to F$, on dit que f est :

— Injective : Si un seul antécédant au plus, i.e. $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

— Surjective : Si un antécédant au moins, i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.

— Bijective : Si un antécédant exactement, i.e. $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$.

Exercise 2.80 (Problème principal)**.** C'est un exercice assez long, on ne s'attend pas à ce qu'il soit traité en entier !

f injective $\Leftrightarrow \hat{f} \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$:

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \subset \hat{f}(f(X))$.

$\Leftarrow$ Attention, même si on connaît le théorème "$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective", cela permet seulement de déduire que $\hat{f} \circ f = \mathcal{P}(E)$ induit f injective **de** $\mathcal{P}(E)$ **dans** $\mathcal{P}(E)$ **!** La question est de prouver que f est injective de E dans E.

Pour ce faire, on regarde $f(x) = f(y)$, on a alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$, puis $x \subset \hat{f}(f(\{x\})) = \hat{f}(f(\{y\})) = Id_{\mathcal{P}(E)}(\{y\}) = \{y\}$, donc $x = y$. f est bien injective.

$\Rightarrow$ Soit $X \subset E$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $y \notin X$ tel que $y \in \hat{f}(f(X))$, alors $f(y) \in f(X)$, donc $\exists x \in X, f(y) = f(x)$. Or $y \neq x$ par hypothèse ($y \notin X$ et $x \in X$), ce qui contredit l'injectivité de f.

Finalement, grâce à la remarque du début : $\forall X \subset E, \hat{f}(f(X)) = X$.

f surjective $\Leftrightarrow f \circ \hat{f} = Id_E$:

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \supset f(\hat{f}(X))$.

$\Leftarrow$ Le théorème "$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective" ne s'applique toujours pas car on obtient $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ surjective (et non $f : E \to E$ surjective).

Soit $y \in E$, on sait que $f \circ \hat{f}(\{y\}) = \{y\}$, puis $y \subset f(\hat{f}(\{y\}))$, c'est-à-dire que $\exists x \in \hat{f}(\{y\}) \subset E, f(x) = y$: f est bien surjective.

$\Rightarrow$ Soit $y \in X$. Comme f est surjective, soit x un antécédant de y par f. Par définition, $y \in X$ induit $x \in \hat{f}(X)$. Dès lors, $y = f(x) \in f(\hat{f}(X))$, donc $X \subset f(\hat{f}(X))$.

Avec la remarque de début de paragraphe, on obtient $\forall X \subset E, f(\hat{f}(X)) = X$.

f injective $\Leftrightarrow \forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$:

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) \subset (f(X) \cap f(Y))$.

$\Leftarrow$ Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) =: z$. On pose $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. On a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{z\} \neq \emptyset$, donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et ainsi $x = y$. f est injective.

$\Rightarrow$ Soit $y \in f(X) \cap f(Y)$. Soient $x \in X$ et $x' \in Y$ tels que $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, on a $x = x'$, puis $x \in X \cap Y$ et ainsi $y \in f(X \cap Y)$. Avec la remarque de début de paragraphe, on a montré que $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 2.81 (Question subsidiaire)**.** Cf exercise 1.75.

Retour à Khôlle 25 : Applications, Relations.

2.26 Correction Khôlle 26 : Applications, Relations

Retour à Khôlle 26 : Applications, Relations.

Exercise 2.82 (Question de cours)**. Cf cours !** On peut utilisez la parité et la périodicité pour conclure sur les graphes de $\arctan \circ \tan$ et $\tan \circ \arctan$.

Exercise 2.83 (Problème principal)**.** On a $f(x-1, y+1) = f(x, y)+1$, $f(0, y) = \frac{1}{2}y(y+3)$ et $f(x, 0) = \frac{1}{2}x(x+1)$, donc $f(y+1, 0) = f(0, y)+1$ donc f est surjective (par récurrence). Elle est aussi strictement croissante en suivant les diagonales de vecteur directeur $(-1, +1)$ dans $\mathbb{N}^2$ (on passe d'une diagonale à la suivante en passant de $(0, y)$ à $(y + 1, 0)$) : **faire un dessin !**

Calculer l'antécédant de $n \in \mathbb{N}$ demande de résoudre d'abord $\frac{a(a+1)}{2} = n$, on identifie ainsi sur quelle diagonale est n, puis on calcule le nombre de pas restants à l'aide de la fonction partie entière. La réciproque explicite est, avec $p = E(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2})$:

$$n \mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2}; n - \frac{p(p+1)}{2}\right)$$

On a donc une bijection $\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$, or on sait que la relation d'être en bijection est une relation d'équivalence (réflexivité : triviale ; symétrie : existence de la bijection réciproque ; transitivité : la composée de deux bijections est une bijection), donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$. Pour $\mathbb{Q}$, il suffit d'utiliser la forme réduite des fractions pour avoir $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$. Ensuite, $\mathbb{Z}^* \simeq \mathbb{N}$ peut être montré en regardant l'application :

$$n \mapsto \begin{cases} 2n - 2 & \text{si } \ n > 0 \\ -2n - 1 & \text{si } \ n < 0 \end{cases}$$

Exercise 2.84 (Question subsidiaire)**.** La relation est évidement réflexive et symétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire.

Ensuite, on trace la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, et on se rend compte que la classe d'équivalence de x contient :

- 1 élément si $x \leq 0$ ou $x = 1$.
- 2 éléments si $x > 0$ et $x \neq 1$.

Retour à Khôlle 26 : Applications, Relations.

2.27 Correction Khôlle 27 : Applications, Trigonométrie hyperbolique

Retour à Khôlle 27 : Applications, Trigonométrie hyperbolique.

Exercise 2.85 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.86 (Problème principal)**.** On a : $f(B) \subset \bigcup_n f(A_n) \subset \bigcup_n A_{n+1} \subset B$.

On a évidemment $A \subset B$, et on a vu que $f(B) \subset B$. Reste à montrer que si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $B \subset C$. Or si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $A_1 = f(A) \subset C$, et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset C$, donc $B \subset C$.

Exercise 2.87 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.45.

Retour à Khôlle 27 : Applications, Trigonométrie hyperbolique.

2.28 Correction Khôlle 28 : Applications, Binôme

Retour à Khôlle 28 : Applications, Binôme.

Exercise 2.88 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.89 (Problème principal)**.** Quitte à permuter f, g et h, on peut supposer que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et $h \circ f \circ g$ est surjective. Alors, comme on sait que si $a \circ b$ injective $\Rightarrow b$ injective et $a \circ b$ surjective $\Rightarrow a$ surjective, on en déduit tout d'abord que h est bijective, $h \circ f$ aussi. Donc $f = h^{-1} \circ (h \circ f)$ est bijective par composition. Enfin, $g = h^{-1} \circ (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est surjective par composition et $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective par composition.

Ainsi, f, g et h sont bijectives.

Exercise 2.90 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.44.

Retour à Khôlle 28 : Applications, Binôme.

2.29 Correction Khôlle 29 : Applications

Retour à Khôlle 29 : Applications.

Exercise 2.91 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.92 (Problème principal)**.** Si E ou F est fini, alors l'autre l'est aussi car si E s'injecte dans F fini, alors E a moins d'éléments que F (cela se montre grâce à la partition $E = \bigcup_{y \in F} \hat{f}(y)$ où $\hat{f}(y)$ contient au plus 1 élément car f est injective). Ensuite, si $E \hookrightarrow F$ et $F \hookrightarrow E$, on en déduit que E et F ont le même nombre d'éléments, disons n. Quitte à numéroter les éléments de $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et de $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, on peut introduire la bijection $e_i \mapsto f_i$ de réciproque $f_i \mapsto e_i$.

Passons à la partie plus corsée... Il faut tout d'abord remarquer qu'avec les définitions de l'énoncé, f^{-1} et g^{-1} sont bien définies et vérifient $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ (idem pour g). Par contre, la première égalité n'est définie que pour certains $y \in F$, pas pour tous : $f^{-1} : f(E) \to E$.

La notion de "la suite est finie" signifie qu'à un certain rang, il n'est pas possible de définir le rang suivant (i.e. f^{-1} ou g^{-1} du terme courant n'est pas défini).

h injective : Supposons que $h(x) = h(y)$.

- Si $x, y \in A$, alors $h(x) = f(x) = f(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de f.
- Si $x, y \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de g^{-1} (car si z avait 2 antécédants par g^{-1}, alors il aurait aurait 2 images par g, ce qui n'est pas possible).
- Si $x \in A$ et $y \notin A$, alors $h(x) = f(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = f^{-1}(g^{-1}(y))$, et on peut itérer avec g^{-1} et f^{-1} pour reconstruire la suite qui part de x et celle (décalée de deux rangs) qui par de y. Or la première est finie et la seconde non. Cette contradiction montre que le cas $x \in A$ et $y \notin A$ est en réalité impossible.

h surjective : Soit $y \in F$. On veut construire $z \in E$ tel que $h(z) = y$. Posons $x = g(y)$.

- Si $x \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g - 1(g(y)) = y$, et on a trouvé notre antécédant : $z = x$.
- Sinon, $x \in A$, et donc $z = f^{-1}(g^{-1}(x))$ aussi. De fait, $h(z) = f(f^{-1}(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) = y$, et là encore on a un antécédant.

Finalement, h est bien une bijection de E dans F.

On pourra essayer de voir qui est h lorsque $f = g = \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$, ou bien $f = \begin{array}{l} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos x \end{array}$ et $g = \begin{array}{l} [-1, 1] \to [0, \pi] \\ x \longmapsto \frac{x+1}{2\pi} \end{array}$.

Exercise 2.93 (Question subsidiaire)**.** Il s'agit ici de montrer que :

- Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors $A = B$.
- Si $f \in \{0, 1\}^E$, on peut construire une partie de E telle que $\mathbb{1}_A = f$.

Pour le premier point, il suffit de voir que si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$, et par symétrie : $A = B$.

Pour la seconde assertion, on construit l'application $A \mapsto \{x \in E, f(x) = 1\}$. On peut facilement vérifier que cette dernière constitue la bijection réciproque de l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

Retour à Khôlle 29 : Applications.

2.30 Correction Khôlle 30 : Applications, Ensembles ordonnés

Retour à Khôlle 30 : Applications, Ensembles ordonnés.

Exercise 2.94 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.95 (Problème principal)**.** On sait que E admet une borne inférieur. Une telle borne est un minimum (car elle appartient à E qui est l'ensemble considéré), nommons-la m. On a $f(m) \in E$, donc $f(m) \geq \inf E = m$, d'où $m \in X$ et $X \neq \emptyset$.

Si $x \in X$, alors $x \leq f(x)$. Comme f est croissante, on peut l'appliquer à cette inégalité et on obtient $f(x) \leq f(f(x))$, donc $f(x) \in X$.

Comme $X \neq \emptyset$ et que E est muni de bornes supérieures, a existe. Supposons $a \notin X$. Alors $f(a) < a$, et comme f est croissante, $f(f(a)) < f(a)$, donc $f(a) \notin X$, or $f(a) < a$, donc a n'est pas la borne supérieur de X. Ainsi, $a \in X$.

On sait que X est stable par f, donc en particulier $f(a) \in X$, d'où d'une part $a \leq f(a)$. Or d'autre part, a majore X, donc $f(a) \leq a$. Finalement, $f(a) = a$, et a est un point fixe.

On pourra prendre par exemple une application croissante dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans celui-ci.

Exercise 2.96 (Question subsidiaire)**.** Pour injecter $E \hookrightarrow \mathcal{P}(E)$ on peut par exemple définir $x \mapsto \{x\}$.

Supposons que f soit surjective. Alors il existe un élément y tel que $f(y) = \{x \in E; x \notin f(x)\}$.

- Est-ce que $y \in f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \notin f(y)$, ce qui contredit notre supposition.
- Est-ce que $y \notin f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \in f(y)$, ce qui contredit notre supposition.

Finalement, par l'absurde, $\{x \in E; x \notin f(x)\}$ ne peut pas posséder d'antécédant par f : f n'est pas surjective.

Pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable, il suffit d'appliquer le théorème qu'on vient de prouver avec $E = \mathbb{N}$.

Retour à Khôlle 30 : Applications, Ensembles ordonnés.

2.31 Correction Khôlle 31 : Calculs d'intégrales & primitives

Retour à Khôlle 31 : Calculs d'intégrales & primitives.

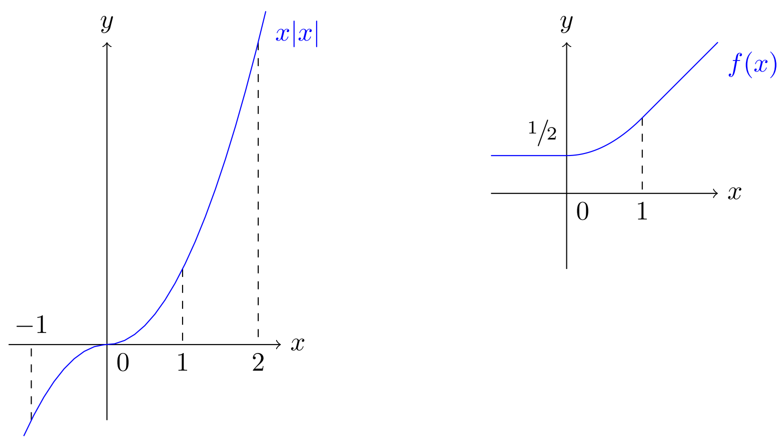
Exercise 2.97 (Question de cours)**. Cf cours !** Utilisez le taux d'accroissement pour la démonstration.

Exercise 2.98 (Problème principal)**.**

- $\int_{-1}^{1} x|x|\mathrm{d}x = 0$ car on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique.
- $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}$.

- ⋆ <u>Si $x \leq 0$,</u> alors $f(x) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2$.
  ⋆ <u>Si $x \geq 1$,</u> alors $f(x) = \int_0^1 x\mathrm{d}t = x$.
  ⋆ <u>Si $0 \leq x \leq 1$,</u> alors $f(x) = \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t = x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

On pourra vérifier que f est continue et même dérivable (indéfiniment).

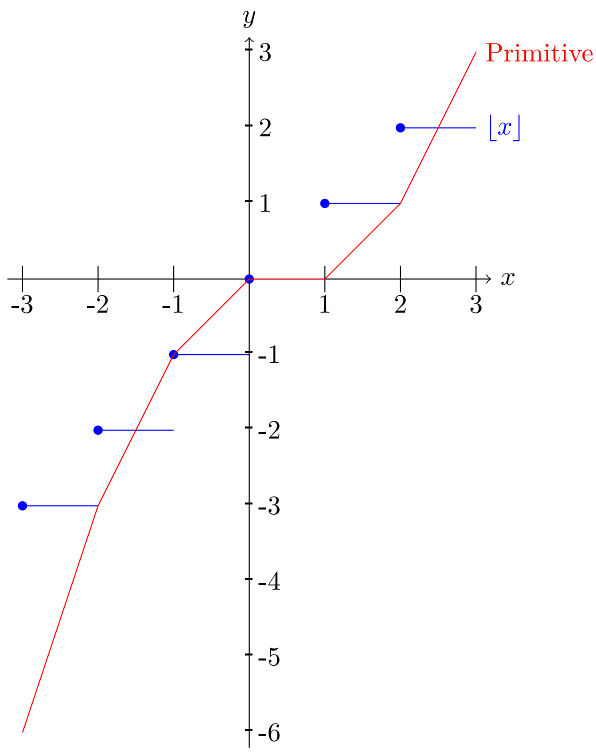


Exercise 2.99 (Question subsidiaire)**.** On commence par tracer la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Ensuite, on sait que sa primitive qui s'annule en 0 passe par le point $(0,0)$, puis a une pente de 1 entre $(0,0)$ et $(1,0)$, puis de 2 entre $(1,0)$ et $(2,1)$, puis de 3 entre $(2,1)$ et $(3,3)$, etc. Donc on doit relier les points (n, u_n) et $(n+1, u_{n+1})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) avec u_n qui vérifie : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \int_0^{n+1} \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x = \int_0^n \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x = u_n + n$, donc $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dans les négatifs, on doit relier les points $(-n, v_n)$ avec $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - (n+1)$, donc $v_n = -\frac{n(n+1)}{2}$.

La formule explicite s'en déduit.



Retour à Khôlle 31 : Calculs d'intégrales & primitives.

2.32 Correction Khôlle 32 : Calculs d'intégrales & primitives

Retour à Khôlle 32 : Calculs d'intégrales & primitives.

Exercise 2.100 (Question de cours)**.** $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ pour u et v dérivables.

En effet, il suffit d'observer que $(uv)' = u'v + v'u$, donc $\int (u'v + v'u) = [uv]$.

On peut par exemple calculer $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$ et $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ grâce à cela.

Exercise 2.101 (Problème principal)**.** $I_0 = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = [-\ln\cos(x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

On remarque que $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) \left(1 + \tan^2(x)\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit déjà que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $I_n \geq 0$, donc $0 \leq I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La formule explicite est plus compliquée à obtenir. Le plus rapide est de regarder la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = ... = I_0 - (-1)^n I_{2n}$$

Donc $I_{2n} = (-1)^n(\frac{\pi}{4} - v_n)$. On a de même $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - u_n)$ en calculant $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$.

Finalement, comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercise 2.102 (Question subsidiaire)**.** Soit F la primitive de f : $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. On a $F(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Or $F' = f$, donc $f = 0$, d'après le théorème principal de l'intégration.

Autre méthode : On peut, *si on a vu le chapitre de théorie de l'intégration (pas seulement celui de calcul)*, utiliser le fait que, pour f continue par morceau, si on suppose $f \neq 0$, alors il existe un point x tel que $f(x) \neq 0$, et un voisinage de x sur lequel f garde un même signe et ne s'annule pas. En intégrant sur cet intervalle, on obtient une valeur non nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Retour à Khôlle 32 : Calculs d'intégrales & primitives.

2.33 Correction Khôlle 33 : Calculs d'intégrales & primitives

Retour à Khôlle 33 : Calculs d'intégrales & primitives.

Exercise 2.103 (Question de cours)**.** Pour une fonction injective continue φ, on a $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$. Plus commodément, on pourra écrire $x = \varphi(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ et remplacer. Attention, dans l'intégrale finale, t n'existe plus !

Exercise 2.104 (Problème principal)**.** On se rappelle que $\int t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]$.

On effectue le changement de variables $u = t - \alpha$ ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $I_{p,q}(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta-\alpha} u^p(u-(\beta-\alpha))^q \mathrm{d}u = I_{p,q}(0, \beta-\alpha)$. Donc, on se bornera à étudier $I_{p,q}(0, x)$.

Ensuite, en posant $u = xv$ ($\mathrm{d}u = x\mathrm{d}v$), on a $I_{p,q}(0, x) = x^{p+q+1} \int_0^1 v^p(v-1)^q \mathrm{d}v = x^{p+q+1} I_{p,q}(0, 1)$.

On va maintenant faire une IPP pour calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(t-1)^q \mathrm{d}t$. On pose

$u' = t^p$ et $v = (t-1)^q$, on a $u = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$ et $v' = q(t-1)^{q-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(t-1)^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(t-1)^{q-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{-q}{p+1}I_{p+1,q-1} \\
&= (-1)^q\left(\prod_{k=0}^{q-1}\frac{q-k}{p+1+k}\right)I_{p+q,0} \\
&= (-1)^q\frac{q!p!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} \\
&= \frac{(-1)^q}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}$$

Finalement, $I_{p,q}(\alpha,\beta) = \frac{(-1)^q(\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$.

Remark. On a $I_{p,q} = (-1)^q I_{q,p}$. On peut le vérifier en posant le changement de variable $u = 1-t$.

Exercise 2.105 (Question subsidiaire)**.** Comme φ est continue (une justification basique de la limite en 0 est attendue tant que le cours de continuité n'a pas été vu), elle possède une primitive Φ qui s'annule en 0. On a : $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, elle est bien définie.

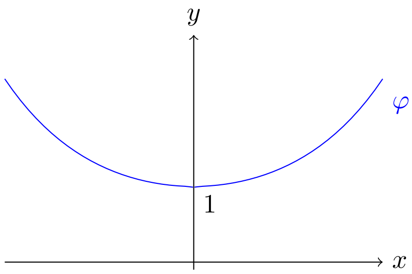
En outre, comme φ est paire, Φ est impaire (cela se démontre par changement de variable $u = -t$). De fait, f est impaire comme somme de fonctions impaires. Φ est dérivable (sa dérivée est φ), donc f aussi et on a :

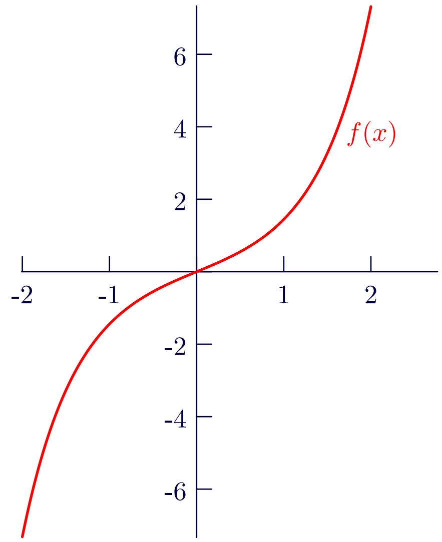
$$f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\sinh(2x) - \sinh(x)}{x}$$

Comme sinh est croissante, on a $\sinh(2x) - \sinh(x) > 0$ si et seulement si $2x > x$ et donc $x > 0$. Ainsi, on a $f'(0) = 0 (= \varphi(2*0) - \varphi(0))$ (limites par taux d'accroissement) et sinon $f'(x) > 0$. Finalement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$ en développant les exponentielles, d'où les limites indiquées.





Retour à Khôlle 33 : Calculs d'intégrales & primitives.

2.34 Correction Khôlle 34 : Calculs d'intégrales & primitives

Retour à Khôlle 34 : Calculs d'intégrales & primitives.

Exercise 2.106 (Question de cours)**. Cf cours !** Utiliser soit le taux d'accroissement, soit le théorème de dérivation de la composée.

Exercise 2.107 (Problème principal)**.** Intégration par parties : $\int \ln^n = [x \ln^n x] - n \int \ln^{n-1}$. De fait :

$$\int \ln^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}$$

Exercise 2.108 (Question subsidiaire)**.** On pose le changement de variables (bijectif) $u = \frac{\pi}{4} - t$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, \mathrm{d}t = -\int_{\pi/4}^{0} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \left[\ln(\sin t+\cos t) - \ln\cos t\right]\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \left[\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - \ln\cos t\right]\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln 2\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2\end{aligned}$$

Retour à Khôlle 34 : Calculs d'intégrales & primitives.

2.35 Correction Khôlle 35 : Calculs d'intégrales & primitives

Retour à Khôlle 35 : Calculs d'intégrales & primitives.

Exercise 2.109 (Question de cours)**.** Toute fonction f continue possède des primitives (des fonctions F tels que $F' = f$). En particulier $F : x \mapsto \int_a^x f(t)t$ en est une pour n'importe quel a tel que f soit définie sur $[a, x]$.

Soient F et G deux primitives de f. Alors, $F' - G' = f - f = 0$, donc si F et G coïncident sur un point, alors elles sont égales (une démonstration rigoureuse demande le cours de dérivation, en particulier le théorème des accroissements finis).

Exercise 2.110 (Problème principal)**.** On a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\cos t + \sin t\right)\right]_0^{\pi/2} = 0$. Ainsi, $I = J = \frac{\pi}{4}$.

On pose $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$. On effectue le changement de variables $t = \sin u$ ($\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$) qui est bijectif pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dès lors, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)\mathrm{d}u}{|\cos u|+\sin(u)} = I = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 2.111 (Question subsidiaire)**.**

- $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\,\mathrm{d}x = \int (x\ln x - x)' e^{x\ln x - x}\,\mathrm{d}x = e^{x\ln x-x} + Constante$. Pour qu'elle s'annule en 0, on prend la constante égale à -1.
- On pose $u = \sqrt{1+x^6}$ ($\mathrm{d}u = \frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}}\mathrm{d}x$ d'où $\frac{1}{3}u\mathrm{d}u = x^5\mathrm{d}x$), on a $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}x^5\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2-1}\frac{1}{3}u\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + Cst = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right) + Cst$. Il n'est pas possible de prendre un Cst telle qu'une primitive s'annule en 0 car toutes les primitives tendent vers $-\infty$ en 0.
- On a $\frac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3}$, donc sur un intervalle où $x \neq \sin x$, une primitive est $x \mapsto \frac{-1}{4(x-\sin x)^2} + Cst$. Il n'est pas possible de prendre un Cst telle qu'une primitive s'annule en 0 car toutes les primitives tendent vers $-\infty$ en 0.

Retour à Khôlle 35 : Calculs d'intégrales & primitives.

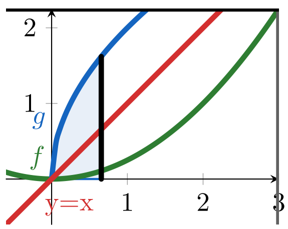
2.36 Correction Khôlle 36 : Calculs d'intégrales & primitives

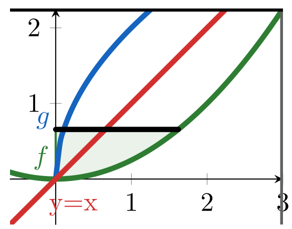
Retour à Khôlle 36 : Calculs d'intégrales & primitives.

Exercise 2.112 (Question de cours)**.** $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$, en effet, $\forall t, -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ et par positivité de l'intégrale : $-\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$, d'où l'inégalité car $\left|\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ (l'intégrale d'une fonction positive est positive).

Exercise 2.113 (Problème principal)**.** On notera que f^{-1} est bien continue (cours sur la continuité), donc les calculs demandés sont valides.

On constate le l'égalité des aires bleues et vertes sur le dessin, par symétrie ($g = f^{-1}$ et $a = 3$) :



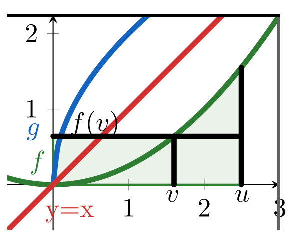


L'aire bleue valant $\int_0^{f(x)} g$, on a immédiatement la première égalité : $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x)$. Démontrons-là par le calcul.

On pose F la primitive de f qui s'annule en 0, $\tilde{F}$ celle de f^{-1} (attention, ce n'est absolument pas F^{-1}, et F n'a pas de raison d'être même bijective), et $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t$. G est bien définie et dérivable avec : $G(x) = F(x) + \tilde{F}(f(x))$, donc $G'(x) = F'(x) + f(x) \times \tilde{F}'(f(x)) = f(x) + f(x) \times f^{-1}(f(x)) = f(x) + xf'(x)$. On constate que c'est la même dérivée que pour $x \mapsto xf(x)$, et qu'elle coïncident en 0.

$\star$ Supposons que $f^{-1}(v) \leq u$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = vf^{-1}(v) + \int_{f^{-1}(v)}^u f \geq vf^{-1}(v) + v(u - f^{-1}(v)) = uv$$



$\star$ Supposons que $v \geq f(u)$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f^{-1} :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = uf(u) + \int_{f(u)}^v f^{-1} \geq uf(u) + u(v - f(u)) = uv$$

Exercise 2.114 (Question subsidiaire)**.** on pose $f : t \mapsto t^{p-1}$ et $g : x \mapsto x^{q-1}$. On a $g(f(t)) = g(t^{p-1}) = t^{(p-1)(q-1)} = t$. En effet, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$, donc par hypothèse $pq = p + q$. Finalement : $g = f^{-1}$. En appliquant l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Young :

$$uv \leq \int_0^u t^{p-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^v t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Retour à Khôlle 36 : Calculs d'intégrales & primitives.

2.37 Correction Khôlle 37 : Géométrie complexe

Retour à Khôlle 37 : Géométrie complexe.

Exercise 2.115 (Question de cours)**.** On note $z \mapsto \overline{z}$ la conjugaison complexe. Alors $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 1$, $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ et $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, c'est donc bien un (endo)morphisme de corps. Ensuite, on constate que le noyau de ce morphisme est nul (c'est un idéal de $\mathbb{C}$, donc $\{0\}$ ou $\mathbb{C}$ en entier). C'est donc bien un automorphisme de corps.

Enfin, si $\overline{z} = z$, alors $\Im(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

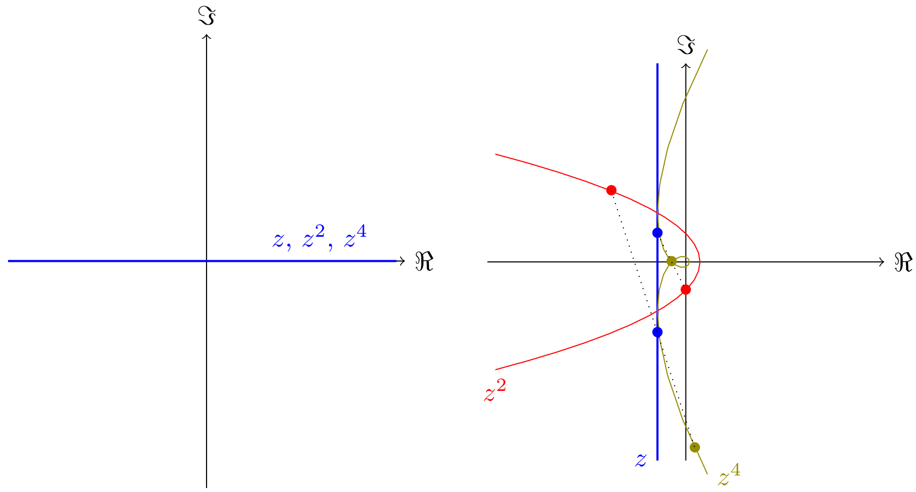
Exercise 2.116 (Problème principal)**.** On a :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')} = 2z\overline{z}+z'\overline{z'} = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$$

Ensuite, en utilisant le précédent résultat et $u^2 = zz'$:

$$\begin{aligned}
&\left(\left|u+\frac{z+z'}{2}\right|+\left|u-\frac{z+z'}{2}\right|\right)^2\\
=&\left|u+\frac{z+z'}{2}\right|^2+\left|u-\frac{z+z'}{2}\right|^2+2\left|u^2-\frac{z^2+z'^2+2zz'}{4}\right|\\
=&2|u|^2+\frac{|z+z'|^2}{2}+\frac{|z-z'|^2}{2}\\
=&2|zz'|+\frac{1}{2}(|z-z'|^2+|z+z'|^2)\\
=&(|z|+|z'|)^2
\end{aligned}$$

Exercise 2.117 (Question subsidiaire)**.** On regarde le nombre $\frac{z^4-z^2}{z^2-z} = z^2 + z$. Les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si ce nombre est réel. On cherche donc les solutions des équations $z^2 + z - \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant : $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})$. Donc les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement $z \in (\mathbb{R} \cup \{\tau; \Re(\tau) = -1/2\})$. **À dessiner dans le plan complexe !**

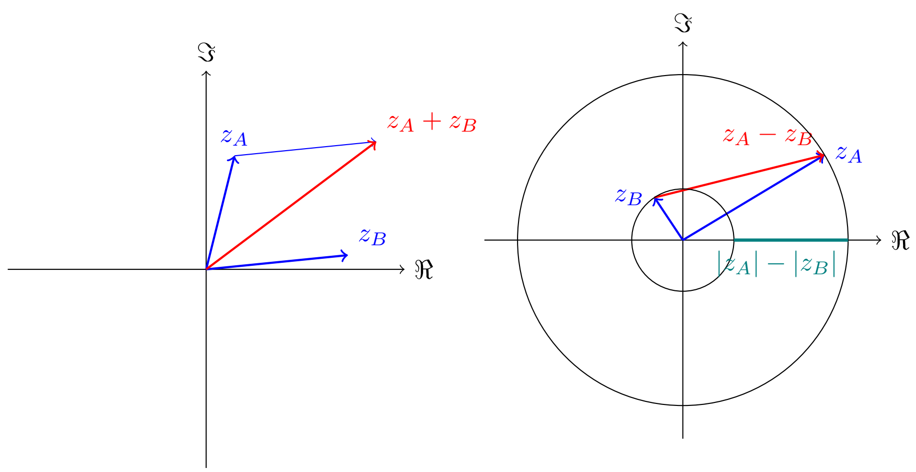


Retour à Khôlle 37 : Géométrie complexe.

2.38 Correction Khôlle 38 : Équation dans les complexes

Retour à Khôlle 38 : Équation dans les complexes.

Exercise 2.118 (Question de cours)**.** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ avec l'égalité si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$. On a aussi $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ et $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.



Pour la démonstration, on mettra tout au carré et on regardera ce qui se passe.

Exercise 2.119 (Problème principal)**.** $(z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow |z+1|^n = |z-1|^n \Rightarrow |z+1| = |z-1|$ Donc le point d'affixe z est équidistant de 1 et de -1 : il est sur la verticale $\Re(z) = 0$, c'est un imaginaire pur. Ensuite, si z est solution de (E), alors on a : $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n\left((z-1)^n + (z+1)^n\right) = 0$

Pour résoudre, on constate que $(E) \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$, donc $(E) \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1], \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ *et* $z \neq 1$. Ainsi, on trouve que l'ensemble de solution : $\mathcal{S} = \{i\ cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right); 1 \geq k \geq n-1\}$

Exercise 2.120 (Question subsidiaire)**.** Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en passant simplement en forme trigonométrique (angle de moitié), on trouve bien que $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$

Réciproquement, si $|1+\lambda i| = |1-\lambda i|$, alors : $|\lambda i - (-1)| = |\lambda i - 1|$, donc $\lambda i \in i\mathbb{R}$ (λi est sur la médiatrice du segment $[-1, 1]$). Finalement $\lambda \in \mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 38 : Équation dans les complexes.

2.39 Correction Khôlle 39 : Complexes et trigonométrie

Retour à Khôlle 39 : Complexes et trigonométrie.

Exercise 2.121 (Question de cours)**. Cf cours !** Le corps $\mathbb{C}$ est dit *algébriquement clos.*

Exercise 2.122 (Problème principal)**.** Le membre de droite vaut $e^{2i\alpha}$ (passer en forme trigonométrique). De fait, l'équation équivaut à l'existence de $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = \omega_k$ avec $\omega_k = e^{i\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$. L'ensemble des solution de l'équation est ainsi $\mathcal{S} = \{\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)}; k \in \{0, 1, 2\}\}$. On peux calculer explicitement que :

$$\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

On constate d'ailleurs que les trois solutions sont réelles. On peut relier cela avec l'exercice 120 et se rendre compte que $\left|\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right| = 1$.

Exercise 2.123 (Question subsidiaire)**.** On prendra bien évidemment le temps de vérifier que si z est dans $\mathbb{H}$, alors z' aussi ! Pour cela, on montrera que $\Im(z') = \frac{\Im(z)}{|\cos\theta - z\sin\theta|^2} \geq 0$.

La réflexivité est évidente.

La symétrie peut être obtenue en prenant $\theta' = -\theta$, on a alors $z = \frac{z'\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z'\sin\theta}$.

La transitivité est bien plus casse-pieds... Si $z \to z'$ via θ et $z' \to z''$ via θ', on a aussi (à vérifier) $z \to z''$ via $\theta'' = \theta + \theta'$. La meilleure manière de le voir est de faire une représentation matricielle.

Retour à Khôlle 39 : Complexes et trigonométrie.

2.40 Correction Khôlle 40 : Application dans les complexes

Retour à Khôlle 40 : Application dans les complexes.

Exercise 2.124 (Question de cours)**. Cf cours !** On a $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Exercise 2.125 (Problème principal)**.** Supposons l'assertion de gauche vérifiée par z_1 et z_2 fixés. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir : $|2+z_1z_2| \geq |2|-|z_1||z_2| = 1$. On est donc dans le cas d'égalité : 2 et z_1z_2 sont alignés, c'est-à-dire $z_1z_2 \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $z_2 = \frac{\lambda}{z_2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient immédiatement que $|2-\lambda| = 1$ d'où $\lambda \in \{-3,-1\}$. La première possibilité est hors de propos car elle contredit $|z_1| = |z_2|$.

La réciproque est fausse, on pourra prendre par exemple $z_1 = 2$ et $z_2 = \frac{-1}{2}$. Par contre, elle est vrai en supposant $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

Exercise 2.126 (Question subsidiaire)**.** On résout déjà $\cosh(z) = 0$, on trouve $z \in i\left(\pm\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Ensuite, $\tanh z = 0$ si et seulement si $\sinh z = 0$ (et $\cosh z \neq 0$), donc si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

En écrivant $z = x+iy$ et en décomposant les exponentielles complexes, on obtient $|\tanh z| < 1 \Leftrightarrow \cos 2y > 0$. Par suite, $|\tanh z| < 1$ *et* $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in \Delta$.

Soit $z \in \Delta$. Par 1), $\tanh z$ existe, et par 3), $|\tanh z| < 1$, donc $\tanh : \Delta \to D$. Si $Z \in D$, alors $z = {}^1\!/_2 \ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + i \arg\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)/2$ vérifie $z \in \Delta$ et $\tanh z = Z$.

En outre, si $\tanh z = Z$ (avec $z = x+iy$ et $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{ia}$), alors $e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}$ et comme $Z \neq 1$, $2\Re\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \frac{2(1-|Z|^2)}{|1-Z|^2} > 0$. Donc $e^{2x} = r$ et $e^{2y} = e^{i\theta}$. D'après la définition de Δ, on se rend compte qu'il n'y a au plus qu'une seule solution.

Ainsi, $\tanh : \Delta \to D$ est une bijection. **Faire un dessin !**

Retour à Khôlle 40 : Application dans les complexes.

2.41 Correction Khôlle 41 : Polynôme complexe

Retour à Khôlle 41 : Polynôme complexe.

Exercise 2.127 (Question de cours)**. Cf cours !** Les points d'affixes a, b et c sont alignés si et seulement si $\arg(b-a) = \arg(c-a)$, ce qui revient à $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Exercise 2.128 (Problème principal)**.** Supposons $|z| > 1$, alors $|1+..+z^{n-1}| \leq |1| + ... + |z^{n-1}| \leq n|z^{n-1}|$, or $n|z^n| > n|z^{n-1}|$, donc z ne peut par être racine du polynôme.

Si $|z| = 1$, alors on a $|1+..+z^{n-1}| \leq n$ et $|nz^n| = n$, donc on doit être dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : tous les 1, z, z^2,..., z^{n-1} sont alignés. On en déduit que z est réel et donc que $z = \pm 1$. Il suffit maintenant de vérifier : 1 est bien racine du polynôme, mais -1 ne l'est pas.

Exercise 2.129 (Question subsidiaire)**.** Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\overline{1+iz} = 1 - iz$, donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = 2\arg(1+iz) = 2\arctan z$. Donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$. On en déduit que $|A| = 1$, puis qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = e^{ia}$.

Réciproquement, si $A = e^{ia}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est $z = -i\frac{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}+1} = \tan\frac{a+2k\pi}{2n}e$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Ainsi, la CNS pour que l'équation n'admette que des solutions réelles est $A \in \mathbb{U}$.

Soit a tel que $a^n = A$, on a alors les racines n-ième de A : $\{a_k := ae^{i\frac{2k\pi}{n}}; 0 \leq k \leq n-1\}$. On résout maintenant : $1 + iz = a_k(1 - iz)$. On trouve $z = -i\frac{a_k - 1}{a_k + 1}$

Retour à Khôlle 41 : Polynôme complexe.

2.42 Correction Khôlle 42 : Équation du second degré

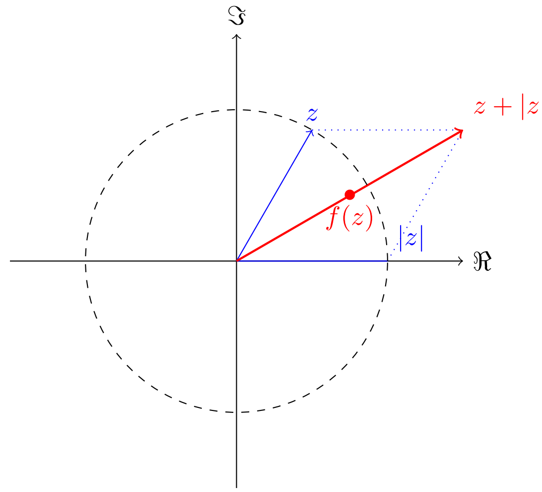
Retour à Khôlle 42 : Équation du second degré.

Exercise 2.130 (Question de cours)**. Cf cours !** L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$, c'est même un isomorphisme de $[0, 2\pi[\to \mathbb{U}$ (bien sûr, $\mathbb{R}$ et $[0, 2\pi[$ sont vus comme des groupes pour l'addition usuelle alors que $\mathbb{U}$ est un groupe pour le produit de nombres complexes).

Exercise 2.131 (Problème principal)**.** On pose $S = 1 + i$ et $P = 2 - i$. x et y sont alors les deux racines du polynôme $T^2 - ST + P$. On calcule $\Delta = S^2 - 4P = 2i - 8 + 4i = -8 + 6i = 2(-4 + 3i) = 10e^{i\theta}$ avec $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ et $\sin\theta = \frac{3}{5}$. On cherche une racine carré de Δ, par exemple : $\delta = \sqrt{10}e^{i\theta/2}$. Dès lors : $x = \frac{S+\delta}{2}$ et $y = \frac{S-\delta}{2}$.

Exercise 2.132 (Question subsidiaire)**.** On a $f(0) = 0$, et $f(\rho e^{i\theta}) = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$. Donc si $Z = re^{ia}$, alors avec $\theta = 2a$ et $\rho = \frac{r}{\cos a}$, on a $f(z) = Z$. L'application f est donc surjective.

Est-ce que f est injective ? Si $f(\rho e^{i\theta}) = f(re^{ia})$, alors $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{a}{2}\ [2\pi]$, donc $e^{i\theta} = e^{ia}$, puis $\rho = r$. f est donc injective.



Retour à Khôlle 42 : Équation du second degré.

2.43 Correction Khôlle 43 : Complexes, Binôme

Retour à Khôlle 43 : Complexes, Binôme.

Exercise 2.133 (Question de cours)**.** Une similitude directe est la composée d'une homothétie (disons de rapport λ et de centre Ω) et d'une rotation (disons de rapport θ) de même centre. Il y a une bijection explicite entre similitudes directes (du plan projectif) et polynômes complexes de degré exactement 1. En effet, l'application ci-dessus décrite peut se ré-écrire en utilisant les affixes complexes : $z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Exercise 2.134 (Problème principal)**.** On pose $S_0 = \sum \binom{3n}{3k}$, $S_1 = \sum \binom{3n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum \binom{3n}{3k+2}$. On a (avec $j^3 = 1$) :

$$\begin{aligned} 1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2 &= \sum j^k \binom{3n}{k} \\ &= (1+j)^{3n} \\ &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

De plus, $\overline{j} = j^2$, donc $0 = \Im(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = \Im(j)(S_1 - S_2)$, et on en déduit $S_1 = S_2$ (qui sont des réels). Puis $(-1)^n = \Re(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = S_0 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = S_0 - S_1$. Enfin, $S_0 + S_1 + S_2 = \sum \binom{3n}{k} = 2^{3n} (= S_0 + 2S_1)$.

Ainsi : $S_1 = S_2 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - (-1)^n\right)$ et $S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2 \times (-1)^n\right)$. On pourra prendre le temps de vérifier que ces nombres sont bien entiers.

Exercise 2.135 (Question subsidiaire)**.** Supposons que a, b et c vérifient le système. On pose $z_{a,b,c} = (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Donc, en particulier $|e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1$, donc $\left|2\cos\frac{a-b}{2}\right| = 1$, puis $(a-b) \in \left(\pm\frac{2\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Par suite, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2e^{ia}$. On en déduit la valeur de c en ré-injectant dans l'équation de départ $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$.

L'ensemble solution est alors :

$$\mathbb{S} \subset \left\{\left(a, a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right); a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

L'inclusion inverse se vérifie rapidement.

Retour à Khôlle 43 : Complexes, Binôme.

2.44 Correction Khôlle 44 : Complexe, Géométrie plane

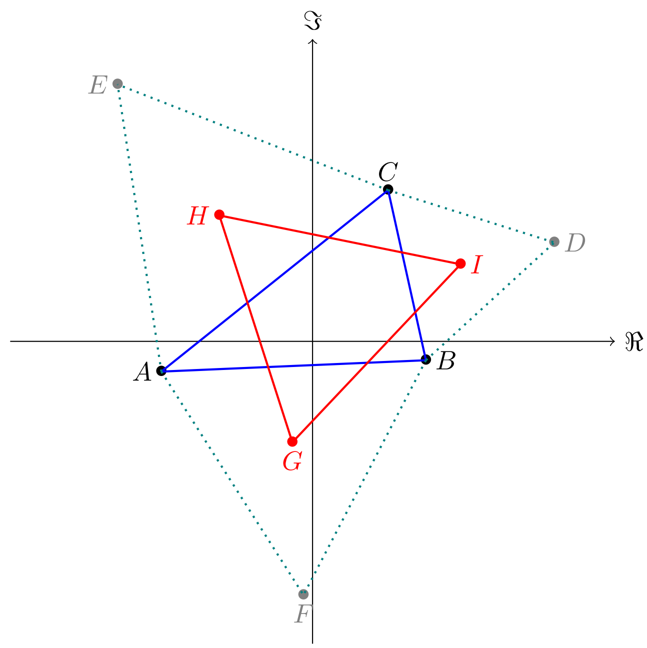
Retour à Khôlle 44 : Complexe, Géométrie plane.

Exercise 2.136 (Question de cours)**.**

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 \\
&= \text{... (Développement avec le binôme de Newton)} \\
&= \frac{-1}{512}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6)
\end{aligned}$$

On aurait pu dès le début se rendre compte qu'on obtiendrait une somme de cos car la fonction qu'on linéarise est paire.

Exercise 2.137 (Problème principal)**.** On notera avec des minuscules les affixes des points correspondant en majuscule.



Comme D est le centre du triangle équilatéral CBA', B est l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$., donc (avec $j^3 = 1$ usuel) : $(d-b) = j(d-c)$. De même $(e-c) = j(e-a)$ et $(f-a) = j(f-b)$. Ainsi : $(1-j)d = b-jc$, $(1-j)e = c-ja$ et $(1-j)f = a-jb$.

On veut montrez que F est l'image de E par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{3}$ de centre D. Or $+\frac{\pi}{3}$ est l'angle de $-j^2$, avec $1+j+j^2 = 0$ (en particulier $1+j = -j^2$) et $|-j^2| = 1$:

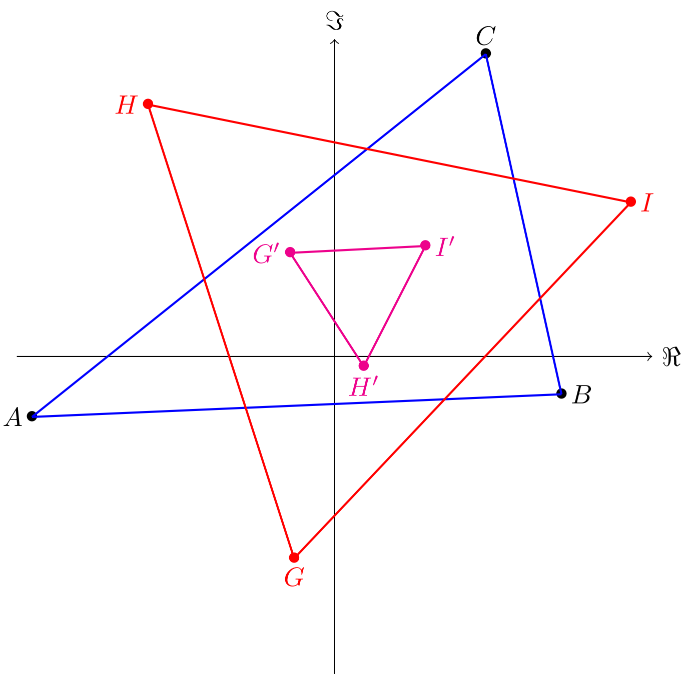
$$\begin{aligned} -j^2 \times \frac{e-d}{f-d} &= -j^2 \times \frac{c-ja-(b-jc)}{a-jb-(b-jc)} \\ &= -j^2 \times \frac{-ja-b+(1+j)c}{a-(1+j)b+jc} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, DEF est bien équilatéral. Quitte à échanger $a \leftrightarrow b$, $b \leftrightarrow c$ et $c \leftrightarrow a$ dans les expressions de d, e et f, on obtient immédiatement que $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ est aussi équilatéral.

Le centre de DEF est le point d'affixe : $\omega = \frac{d+e+f}{3}$. On a :

$$(1-j)\omega = \frac{(b-jc)+(c-ja)+(a-jb)}{3} = (1-j)\frac{a+b+c}{3}$$

Ainsi, les centres de ABC, DEF et $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ sont identiques.



Pour ce qui est du calcul des aires, on utilise la formule (bien connue) : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b-a|^2$ (et idem pour les autres triangles équilatéraux). On peut retrouver cette formule en regardant les hauteurs. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\mathcal{A}_{DEF} - \mathcal{A}_{\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}}\right) &= (e-d)\overline{(d-e)} - (\tilde{d}-\tilde{e})\overline{(\tilde{e}-\tilde{d})} \\
&= \frac{(b-jc-c+ja)(\overline{b}-j^2\overline{c}-\overline{c}+j^2\overline{a})}{(1-j)(1-j^2)} - \frac{(c-jb-a+jc)(\overline{c}-j^2\overline{b}-\overline{a}+j^2\overline{c})}{(1-j)(1-j^2)} \\
&= 3((b-c)+j(a-c))(\overline{(b-c)}+j^2\overline{(a-c)}) - 3((c-a)+j(c-b))(\overline{(c-a)}+j^2\overline{(c-b)}) \\
&= 3(-j+j^2)(b-c)\overline{(a-c)} + 3(j-j^2)(a-c)\overline{(b-c)} \\
&= 2\times 3\sqrt{3}\Re((b-c)\overline{(a-c)}) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\overline{\mathcal{A}}_{ABC}
\end{aligned}$$

Finalement, la différence des aires des deux triangles équilatéraux est exactement l'aire algébrique du triangle de départ.

Exercise 2.138 (Question subsidiaire)**.** On pose $Z = z^3$ et on résout $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$. Les solutions sont $Z_0 = e^{i\theta}$ et $\overline{Z_0} = e^{-i\theta}$. De fait, les 6 solutions de l'équation de départ sont les complexes qui vérifient $z^3 = Z_0$ ou $z^3 = \overline{Z_0}$, c'est-à-dire : $\{e^{i\theta/3}; e^{-i\theta/3}; je^{i\theta/3}; je^{-i\theta/3}; j^2e^{i\theta/3}; j^2e^{-i\theta/3}\}$, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, en réunissant les racines conjuguées que $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1$ se factorise en :

$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + 1\right)$$

Exercise 2.139 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.120.

Retour à Khôlle 44 : Complexe, Géométrie plane.

2.45 Correction Khôlle 45 : Exponentielle complexe

Retour à Khôlle 45 : Exponentielle complexe.

Exercise 2.140 (Question de cours)**.** Il s'agit de formules indispensables !

Formule d'Euler $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

Pour le démontrer, il s'agit de remarquer, d'une part que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, ce qui se montre grâce au calcul des coordonnées du point d'affixe $e^{i\theta}$ dans un repère orthonormé usuel ; et d'autre part que $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.

Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

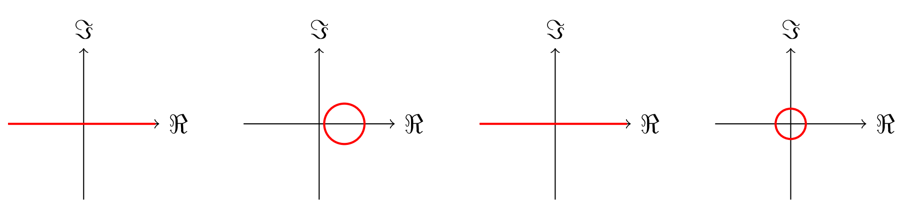
Ici, on peut simplement utiliser la formule d'Euler dans les deux sens : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercise 2.141 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.126.

Exercise 2.142 (Question subsidiaire)**.** En écrivant $z = x + iy$, on obtient (attention, on enlèvera le point $(1, 0)$ de chacun des lieux car $z \neq 1$) :

- ($|w| = 1$) Cette condition équivaut à $(1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$, ce qui revient à $x = 0$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.
- ($|w| = 2$) Cette condition équivaut à $(1+x)^2 + y^2 = 4(1-x)^2 + 4y^2$, ce qui revient à $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$. Le lieu recherché est le cercle de centre $(5/3, 0)$ et de rayon $4/3$.
- ($w \in \mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1+z)(1-\overline{z}) = (1-z)(1+\overline{z})$, puis $z = \overline{z}$, ce qui revient à $z \in \mathbb{R}$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.
- ($w \in i\mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1+z)(1-\overline{z}) = -(1-z)(1+\overline{z})$, puis $z\overline{z} = 1$, ce qui revient à $z \in \mathbb{U}$. Le lieu recherché est le cercle unité.

On pourra essayer de résoudre les premier, troisième et quatrième cas avec un point de vue purement géométrique.



$|w| = 1$ $\quad$ $|w| = 2$ $\quad$ $w \in \mathbb{R}$ $\quad$ $w \in i\mathbb{R}$

Retour à Khôlle 45 : Exponentielle complexe.

2.46 Correction Khôlle 46 : Complexes, Polynômes

Retour à Khôlle 46 : Complexes, Polynômes.

Exercise 2.143 (Question de cours)**.** L'exponentielle complexe est un morphisme surjectif de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, qui envoie $\mathbb{R}$ surjectivement sur $\mathbb{U}$. On a $|e^z| = e^{\Re}z$ et $\arg e^z \equiv \Im z \ [2\pi]$, donc l'équation $e^z = a$, d'inconnue z et de connue a, a pour solution $(\log|a| + i\,(\arg a + 2\pi\mathbb{Z}))$.

Exercise 2.144 (Problème principal)**.** On oublie les cas triviaux : $z_0 = z_1$.

On a forcément $\alpha \neq 1$ car sinon la suite est arithmétique de raison $z_1 - z_0$, donc pas périodique.

On montre ensuite par récurrence que $z_n - z_0 = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(z_1 - z_0)$. Ainsi, si la suite est périodique, alors il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que $z_{n_0} = z_0$, d'où $\alpha^{n_0} = 1$, c'est-à-dire $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n (\neq \mathbb{U})$.

Réciproquement, si $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$, alors $(z_n)_n$ est bien périodique car $z_{n+n_0} - z_n = \frac{1-\alpha^{n_0}}{1-\alpha}(z_{n+1} - z_n) = 0$.

On pourra s'intéresser au cas où $(z_n)_n$ est seulement ultimement périodique $(\exists N, p, \forall n \geq N, z_{n+p} = z_n)$.

Exercise 2.145 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.129.

Retour à Khôlle 46 : Complexes, Polynômes.

2.47 Correction Khôlle 47 : Complexes, Géométrie plane

Retour à Khôlle 47 : Complexes, Géométrie plane.

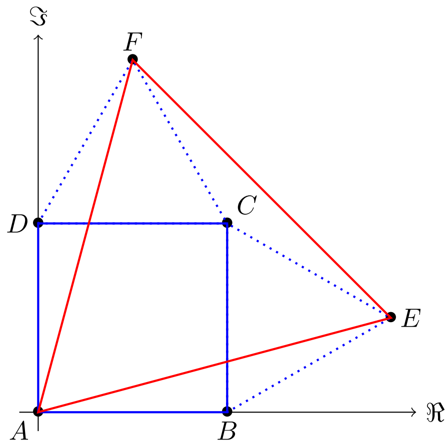
Exercise 2.146 (Question de cours)**.** Les solutions de $z^n = a$ sont $\{\omega e^{i\frac{2k\pi}{n}}; k \in [0, n-1]\}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ fixé tel que $\omega^n = a$. Donc :

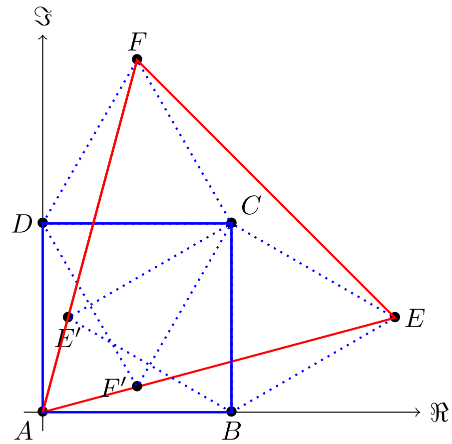
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^n \times e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} = a e^{i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1} a$$

Exercise 2.147 (Problème principal)**.** On note les affixes complexes avec des minuscules pour les points correspondants en majuscule. On place le repère tel que $a = 0$. On utilise abondamment $1 + j + j^2 = 0$.

D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$: $d = ib$. De même, $c = d + b = (1+i)b$. Ensuite, E est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{3}$: $(e - c) = -j^2(b - c)$ puis $e = b(1 + i + ij^2) = (1 - ij)b$. Pareillement : $f = d - j^2(c - d) = (i - j^2)b$.





Pour montrer que AEF est équilatéral, il suffit de montrer que $(f-a) = -j^2(e-a)$, or $-j^2e = (-j^2+i)b = f$. Pour le triangle intérieur, on peut raisonner exactement de la même manière avec $e' = (1-j^2i)b$ et $f' = (1+i-j^2)b = (i-j)b$. D'où, ici un triangle équilatéral $AF'E'$ (attention à l'orientation).

Pour calculer les aires, on utilise la formule bien connue pour un triangle équilatéral de côté de longueur l : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Donc, on a : $\mathcal{A}_{AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2+\sqrt{3})$ et $\mathcal{A}_{AF'E'} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2-\sqrt{3})$ (on prendra garde à vérifier que c'est positif !).

On remarquera aussi sur la figure que A, E' et F sont alignés, tout comme A, F' et E. Il suffit pour le montrer de voir que $\frac{f}{e'} \in \mathbb{R}$ (idem $\frac{e}{f'} \in \mathbb{R}$). En effet :

$$\frac{f}{e'} = \frac{(i-j^2)b}{(1-j^2i)b} = \frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}+i} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

Par symétrie, on a aussi que $\frac{e}{f'} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. On en déduit une nouvelle fois que $\mathcal{A}_{AF'E'} \times (2+\sqrt{3})^2 = \mathcal{A}_{AEF}$.

Exercise 2.148 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.128.

Retour à Khôlle 47 : Complexes, Géométrie plane.

2.48 Correction Khôlle 48 : Complexes, Géométrie plane

Retour à Khôlle 48 : Complexes, Géométrie plane.

Exercise 2.149 (Question de cours)**.** $\mathbb{U}$ est un groupe est supposé connu.

Il faut donc montrer que si $z \in \mathbb{U}_n$ (i.e. $z^n = 1$), alors $z \in \mathbb{U}$ (i.e. $|z| = 1$), que $1 \in \mathbb{U}_n$ et que le produit et l'inverse d'éléments de $\mathbb{U}_n$ est dans $\mathbb{U}_n$. Le premier fait est évident car si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $|z|^n = |1| = 1$, donc $|z| = 1$ car $|z| \in \mathbb{R}_+^*$. Ensuite, $1^n = 1$, donc $A \in \mathbb{U}_n$. Enfin, si $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$, alors $(z_1z_2)^n = z_1^nz_2^n = 1$

et $(z_1^{-1})^n = {}^1\!/_{z_1^n} = 1$, donc la loi est interne et inversible. Finalement, $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

De même, si $d|n$, on a (on note $n = dk$) $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$ car $z^n = (z^d)^k = 1^k = 1$, comme tous deux sont des groupes, $\mathbb{U}_d$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$.

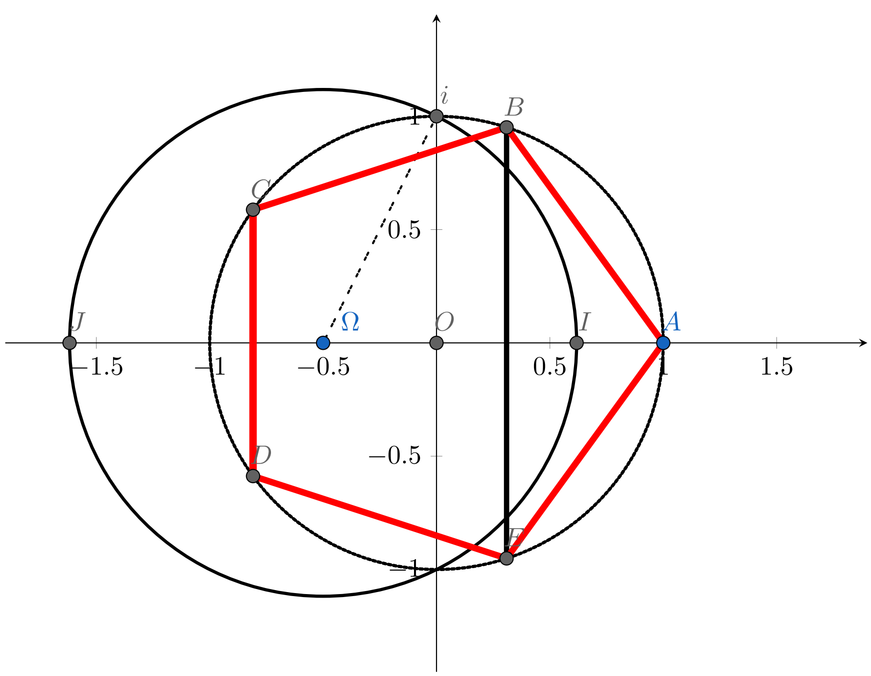
Exercise 2.150 (Problème principal)**.** On a $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. En notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, on sait que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$, donc $a+b = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1$. En outre, $ab = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7 = -1$ grâce à $\omega^5 = 1$. Ainsi, a et b sont les racines de X^2+X-1, c'est-à-dire : $\{a,b\} = \{\frac{-1-\sqrt5}{2}, \frac{-1+\sqrt5}{2}\}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $a > 0$, d'où :

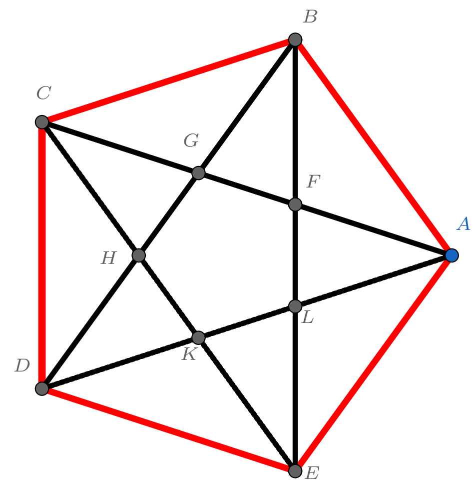
$$a = \frac{-1+\sqrt5}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1-\sqrt5}{2}$$

On obtient :

x	$\pi/5$	$2\pi/5$	$4\pi/5$
$\cos x$	$1/4(1+\sqrt5)$	$1/4(-1+\sqrt5)$	$1/4(-1-\sqrt5)$
$\sin x$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt5}$	$1/4\sqrt{10+2\sqrt5}$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt5}$

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \Omega M)$ a pour rayon $|\Omega M| = |-1/2 - i| = \sqrt{\frac54} = \frac{\sqrt5}{2}$. Comme Ω est déjà su l'axe des abscisses, on en déduit : $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt5}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt5}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. Ainsi, pour construire le pentagone régulier, il suffit de tracer $\mathcal{C}(O,1)$, puis les médiatrices de $[O,I]$ et $[O,J]$, ce qui nous donne 4 sommets du pentagone, le cinquième étant le point d'affixe 1.





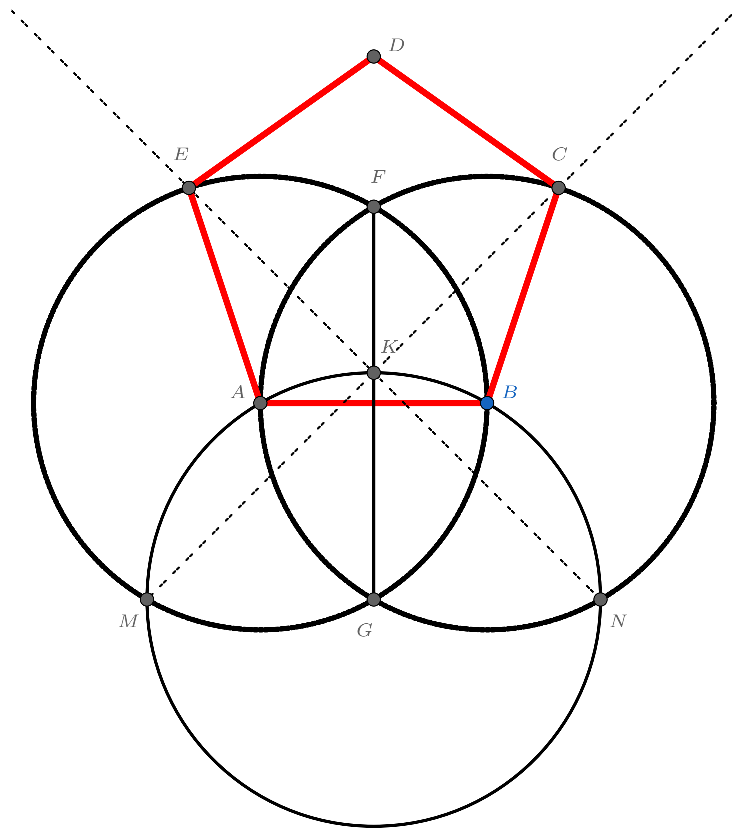
Pour calculer $\frac{AF}{AC}$, on peut utiliser le théorème de Thalès. On appelle $FGHKL$ le pentagone intérieur. Alors, si on regarde AFL et ACD, on obtient $\frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD}$. Puis, en regardant KCD et KBE, on obtient $\frac{KC}{KE} = \frac{CD}{BE}$. Enfin, avec les égalités de longueur $BE = AC$, $KC = AF$, $KE = CF$ et $FL = FG$, on peut poser $x = \frac{AF}{AC}$ et on a :

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD} = FG \times \left(\frac{BE \times AF}{FC}\right)^{-1} = \frac{(1-2x)(1-x)}{1 \times x}$$

(À la dernière étape, on a divisé en haut et en bas par AC^2.) D'où $x^2 - 3x + 1 = 0$ puis $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (car $x < 1$).

On procède de même pour $y = \frac{FG}{AF}$. On a $y = \frac{1-2x}{x}$ en divisant en haut et en bas par AC. D'où finalement le nombre d'or : $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercise 2.151 (Question subsidiaire)**.** On commence par tracer la figure et poser quelques noms.



Le plus efficace est de placer l'origine du repère au milieu du segment $[A, B]$. On note par des minuscules les affixes complexes des points en majuscules et i et j les nombres complexes usuels ($i^2 = -1$, $j^3 = 1$).

On sait, par construction que les segments rouges ont tous la même longueur. Néanmoins, il convient de mesurer l'angle entre eux, au niveau de B par exemple. On veut donc les affixes de A, B et C. Soit l la longueur du segment rouge $[A, B]$. On a immédiatement, dans notre repère : $a = -{}^1\!/_2 l$ et $b = +{}^1\!/_2 l$.

Reste c... En raisonnant avec les triangles équilatéraux AGB puis AMG, on obtient $g = -{}^{\sqrt{3}}\!/_2 li$ et $m = g - -j^2(a - g) = -lj$. K est à la verticale de G à une distance l : $k = (1 - {}^{\sqrt{3}}\!/_2)\, l$. Ainsi, comme C est sur la droite (MK), on a d'une part l'existence d'un réel t tel que

$$\frac{c}{l} = k + t(k - m) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

En outre, C est à une distance l de B :

$$|c-b|^2 = l^2 \quad \text{puis} \quad \left|\frac{c}{l} - \frac{1}{2}\right|^2 = 1$$

En remplaçant, on obtient que t vérifie :

$$(15-6\sqrt{3})t^2 + 4(3-2\sqrt{3})t - 2\sqrt{3} = 0$$

Ainsi, on trouve 2 valeurs de t possibles, on sait qu'on veut la plus élevée étant donné l'endroit où on souhaite que soit le point C : $t = \frac{-2(3-2\sqrt{3})+\sqrt{48-18\sqrt{3}}}{15-6\sqrt{3}}$.

On a tous le matériel pour conclure : on veut que $\frac{c-b}{a-b} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$. Ce qui nous donne :

$$-e^{i\frac{3\pi}{5}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

On peut comparer (avec une calculatrice) $\frac{\Im(z)}{\Re(z)}$ des deux membres, c'est-à-dire la tan dans l'angle en question. On trouve un angle correspondant de 109.0278° au lieu des 108° attendus, soit $0,95\%$ d'erreur relative.

Retour à Khôlle 48 : Complexes, Géométrie plane.

2.49 Correction Khôlle 49 : Changement trigonométrique

Retour à Khôlle 49 : Changement trigonométrique.

Exercise 2.152 (Question de cours)**. Cf cours !** On différenciera dans la résolution les trois cas possibles pour les racines du polynôme caractéristique.

Exercise 2.153 (Problème principal)**.** On peut soit utiliser les expressions trigonométriques, soit les nombres complexes afin de développer le $\sin(x-t)$. Le but est de ne plus avoir de x dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(\frac{e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)}}{2i}\right) g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f est donc bien définie et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix} \times \frac{g(x)}{e^{ix}}\right) - \frac{1}{2i}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix} \times e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \cos(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Non seulement on a l'expression souhaitée, mais en plus on constate qu'on peu facilement calculer la dérivée seconde par le même procédé (en repartant de l'avant dernière ligne) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix}\times\frac{g(x)}{e^{ix}}\right) + \frac{1}{2}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix}\times e^{ix}g(x)\right) \\ &= \frac{2}{2}g(x) - \left(\frac{1}{2i}e^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}e^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= g(x) - \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy : $f'' + f = g$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

On sait désormais résoudre entièrement cette équation car on vient d'en exhiber une solutions particulière. Les solutions sont exactement les fonctions y telles que :

$$\exists\lambda,\mu,\forall x, y(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin x + f(x)$$

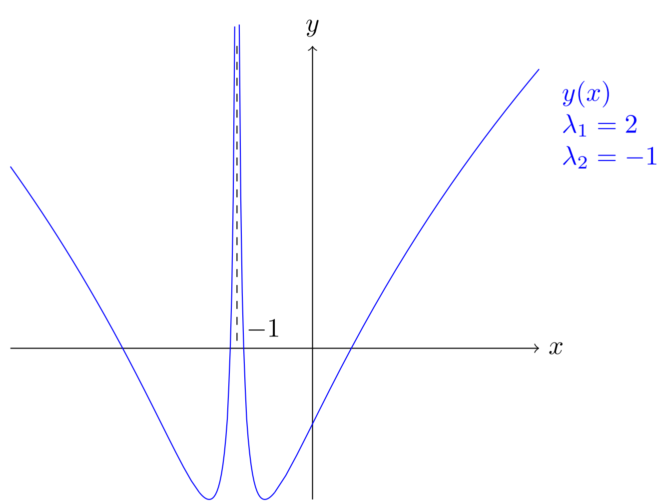
Pour résoudre le problème de Cauchy associé avec $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$, par exemple, il faut et il suffit de prendre $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta$.

Exercise 2.154 (Question subsidiaire)**.** On pose $z = y'$, on a une équation d'ordre 1 en z. La solution homogène est $\lambda\frac{1}{x+1}$, et une méthode de variation de la constante mène à :

$$z(x) = \frac{1}{x+1}\left(2\ln|1+x| + \lambda_1\right)$$

On intègre donc pour trouver finalement sur tout intervalle qui ne contient pas -1 :

$$y(x) = \ln^2|x+1| + \lambda_1\ln|x+1| + \lambda_2$$



Retour à Khôlle 49 : Changement trigonométrique.

2.50 Correction Khôlle 50 : Problème de recollement

Retour à Khôlle 50 : Problème de recollement.

Exercise 2.155 (Question de cours)**.** Soit une équation différentielle linéaire homogène $\varphi(y, y', y', ..., x) = 0$. Soit y_1 tel que $\varphi(y_1, y_1', ..., x) = a(x)$ et y_2 tel que $\varphi(y_2, y_2', ..., x) = b(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(y_1 + \lambda y_2, y_1' + \lambda y_2', ..., x) = a(x) + \lambda b(x)$. Ainsi, si on cherche à résoudre une équation différentielle dans laquelle le membre de droite se sépare en une somme de fonction, on peut trouver une solution particulière séparément pour chaque terme, et sommer pour obtenir une solution particulière à notre équation.

Exercise 2.156 (Problème principal)**.** Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation revient à $\left(\frac{e^x}{x}y\right)' = xe^x$. Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation revient à $(-xe^{-x}y)' = x^3e^{-x}$. On résout alors le problème de la solution particulière en la cherchant de la forme polynôme (de degré 3)$\times e^{-x}$. Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{\mu e^x + 6}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Si on souhaite effectué un recollement $\mathcal{C}^1$, on se rend compte (continuité) qu'il faut que $y(0) = 0$ et par suite $\mu = -6$. En outre, on a les dérivées à gauche et à droite de 0 : $-1 + \lambda$ et $3 + (-6) \times \frac{1}{2} = 0$. Ainsi, $\lambda = 1$ est la seule possibilité. Il existe donc une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour cette équation :

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + xe^x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 6 - 6\frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercise 2.157 (Question subsidiaire)**.** On pose $z = y^2$, alors $x^2 + z = xz'$, ce qu'on résout en $z(x) = \lambda x + x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$. Cela donne donc $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + \lambda x}$.

Si on souhaite intégrer cette équation sur $\mathbb{R}$ en entier avec $y \in \mathcal{C}^1$, alors, par continuité, on sait que y garde un signe constant sur tout intervalle où elle ne s'annule pas, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 par 0. Ainsi, il existe $\lambda_-, \lambda_+ \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 + \lambda_- x} \text{ si } x < 0 \\ \pm\sqrt{x^2 + \lambda_+ x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Supposons $\lambda_- < 0$, alors $y(x)$ n'est pas dérivable en $-\lambda_-$, donc pas $\mathcal{C}^1$. On en déduit $\lambda_- \geq 0$ et pareillement $\lambda_+ \geq 0$. On teste la dérivée en 0 : $y'(x) = \frac{2x + \lambda_\pm}{2\sqrt{x^2 + \lambda_\pm x}}$. Pour que y soit continûment dérivable en 0, on en déduit $\lambda_\pm = 0$, puis $y(x) = x$ ou $y(x) = -x$ sur $\mathbb{R}$ (qui toutes deux fonctionnent).

Retour à Khôlle 50 : Problème de recollement.

2.51 Correction Khôlle 51 : Solution périodique

Retour à Khôlle 51 : Solution périodique.

Exercise 2.158 (Question de cours)**.** Cela correspond au problème de Cauchy : si deux courbes intégrales se croisent, disons en (x_0, y_0), alors ces deux courbes sont solutions de l'équation linéaire du premier ordre (avec $a(x)$ qui ne s'annule pas) et vérifient $y(x_0) = y_0$, on a donc un problème de Cauchy. Par unicité de la solution, les deux courbes sont identiques.

Réciproquement, tout point (x_0, y_0) du plan admet une courbe intégrale qui y passe, celle qui est solution du problème de Cauchy formé de l'équation de départ et de la condition $y(x_0) = y_0$.

Exercise 2.159 (Problème principal)**.** On sait que les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc pour un réel x fixé :

$$\begin{aligned} g(x+T) - g(x) &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT} - 1) + e^{-a(x+T)} \left(\int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} e^{at} f(t)\mathrm{d}t \right) - e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT} - 1) + e^{-a(x+T)} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a effectué un changement de variable dans la seconde intégrale avec $u = t - T$.

Ainsi, g est T périodique si et seulement si $\lambda = \frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t$. Cette constante existe car $a \neq 0$ et $T \neq 0$. Finalement :

$$g(x) = \left(\frac{e^{-aT}}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{at} f(t)\mathrm{d}t \right) e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t$$

Exercise 2.160 (Question subsidiaire)**.** En posant $x = \sin t$, on a $z(t) = y(\sin t)$, donc $z'(t) = \cos t y'(\sin t)$ puis $z''(t) = \cos^2 t y''(\sin t) \sin t y'(\sin t)$. Il s'ensuit que l'équation équivaut à $z'' + z = 0$, et on trouve les solutions de la forme $z(t) = A \sin t + B \cos t$, ce qui redonne $y(x) = Ax + B\sqrt{1 - x^2}$ en utilisant l'arcsin.

Pour $x > 1$, on peut poser $x = \cosh t$, et on a $z'' - z = 0$, puis $z(t) = \alpha \cosh t + \beta \sinh t$. Cela donne $y(x) = \alpha x + \beta\sqrt{x^2 - 1}$. En remarquant que si y est solution de l'équation, alors $x \mapsto y(-x)$ aussi, on trouve que les solutions pour $x < -1$ sont précisément de la même forme.

Un recollement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas possible, par contre on peut construire plein de recollements continus.

Retour à Khôlle 51 : Solution périodique.

2.52 Correction Khôlle 52 : Fonction de Bessel

Retour à Khôlle 52 : Fonction de Bessel.

Exercise 2.161 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.162 (Problème principal)**.** On va raisonner par récurrence. On fixe $f = \frac{nJ_n(x)}{x} - J'_n(x)$. Il s'agit de montrez que f vérifie (E_{n+1}). Calculons déjà J'''_n en dérivant (E_n) :

$$\forall x,\ 2xJ''_n + x^2J'''_n + J'_n + xJ''_n + 2xJ_n + (x^2 - n^2)J'_n = 0$$

Ainsi :

$$\forall x,\ -x^2J'''_n = 3xJ''_n + (x^2 - n^2 + 1)J'_n + 2xJ_n$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} x^2f''(x) &= xnJ''_n - 2nJ'_n + \frac{2nJ_n}{x} - x^2J'''_n \\ &= xJ''_n(n+3) + J'_n(x^2 - n^2 - 2n + 1) + J_n\left(\frac{2n}{x} + 2x\right) \end{aligned}$$

Puis :

$$xf'(x) = -xJ''_n + nJ'_n - \frac{n}{x}J_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &x^2f'' + xf' + (x^2 - n^2)f \\ &\quad = xJ''_n(n+2) + J'_n(x^2 - n^2 - n + 1) + J_n\left(\frac{x}{n} + 2x\right) - (x^2 - (n+1)^2)\left(\frac{nJ_n}{x} - J'_n\right) \\ &\quad = xJ''_n(n+2) + J'_n(n+2) + (x^2 - n^2)J_n\frac{n+2}{x} \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

On obtient la dernière égalité en multipliant la ligne par $\frac{x}{n+2}$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence : J_n est solution de (E_n). On a bien montré que $J_{n+1} = \frac{nJ_n}{x} - J'_n$ est solution de (E_{n+1}).

Grâce à cela, on exprime $\frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1}$ en fonction de J_{n-1}. D'une part : $\frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1} = \frac{nJ_n}{x} + J'_n$. Ensuite, on a aussi : $\frac{nJ_n}{x} = \frac{n(n-1)J_{n-1}}{x^2} - \frac{nJ'_{n-1}}{x}$. On peut aussi dériver l'égalité pour obtenir : $J'_n = \frac{(n-1)J'_{n-1}}{x} - \frac{(n-1)J_{n-1}}{x^2} - J''_{n-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1} &= \frac{nJ_n}{x} + J'_n \\ &= \frac{n(n-1)J_{n-1}}{x^2} - \frac{nJ'_{n-1}}{x} + \frac{(n-1)J'_{n-1}}{x} - \frac{(n-1)J_{n-1}}{x^2} - J''_{n-1} \\ &= \frac{-1}{x^2}\left(x^2J''_{n-1} + xJ'_{n-1} - (n-1)^2J_{n-1}\right) \\ &= J_{n-1} \end{aligned}$$

On a utilisé (E_{n-1}) pour obtenir la dernière ligne.
Ensuite, on a un système de deux équations. On en déduit :

$$\begin{cases} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \\ J_{n-1} - J_{n+1} = 2J_n' \end{cases}$$

Pour calculer la dérivée souhaitée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n J_n(x)\right) &= n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) \\ &= \frac{x^n}{2}\left(\frac{2n J_n(x)}{x} + 2J_n'\right) \\ &= x^n J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

On a simplement sommé les deux égalités précédentes pour obtenir la dernière ligne.

La valeur de $J_n(0)$ pour $n \neq 0$ peut être obtenue en faisant tendre $x \to 0$ dans l'équation différentielle. On obtient immédiatement que $-n^2 J_n(0) = 0$. On notera aussi que $J_n'(0) = 0$ pour $n > 1$ grâce aux égalités précédentes. En fait, on peut aller beaucoup plus loin dans le développement de Taylor en 0 : $J_n(x) \in o(x^{n-1})$ et même $J_n(x) \in O(x^{n-1})$, voire $J_n(x) = \frac{1}{n!2^n} x^n + O(x^{n+2})$.

Les fonctions de Bessel de première espèce ont encore plein d'autres propriétés. On pourra les voir en Spé par exemple. Il en existe aussi de "seconde espèce", mais elles sont bien plus loin du programme. Ce sont des réponses à des problèmes physiques de mécaniques ondulatoire en particulier. On notera la formule générale (qui donne les valeurs explicites de J_0) :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) \mathrm{d}t$$

Exercise 2.163 (Question subsidiaire)**.** On pose $(E) : a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$ d'inconnue la fonction y. En posant z tel que $y = z.y_0$, on a :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(z.y_0)'' & &+ b(z.y_0)' & &+ cz.y_0 \\ &= a(z''.y_0 + 2z'.y_0' + z.y_0'') & &+ b(z'.y_0 + z.y_0') & &+ cz.y_0 \\ &= (ay_0)z'' + (2ay_0' + by_0)z' + (ay_0'' + by_0' + cy_0)z \end{aligned}$$

Comme y_0 est solution, on obtient donc que z' vérifie l'équation linéaire en f du premier ordre : $a(x)y_0(x)f'(x) + (2a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x))f = 0$. Ce qu'on sait résoudre !

Retour à Khôlle 52 : Fonction de Bessel.

2.53 Correction Khôlle 53 : Contrôle de la solution

Retour à Khôlle 53 : Contrôle de la solution.

Exercise 2.164 (Question de cours)**. Cf cours !** C'est bien plus efficace et profond qu'on ne le pense à première vue.

Exercise 2.165 (Problème principal)**.** Si y est solution de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2y'y - y^2\frac{q'}{q^2} + 2y'y''\frac{1}{q} \\ &= -y'^2\frac{q'}{q^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Par suite, z est une fonction positive et décroissante au voisinage de $+\infty$: elle y est bornée. L'inégalité $\forall x \geq A, 0 \leq y^2(x) \leq z(x)$ prouve alors que y est bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercise 2.166 (Question subsidiaire)**.** Avec $u = x' + iy'$, on a $u' = -i\omega u$, puis :

$$u = u_0 e^{i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t) + i\,(x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t)$$

Ainsi, on obtient en intégrant :

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) - \frac{y'(0)}{\omega}$$

Et :

$$y(t) = -\frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t + y(0) + \frac{x'(0)}{\omega}$$

L'équation sur z s'intègre indépendamment en $z(t) = z'(0)t + z(0)$.

Retour à Khôlle 53 : Contrôle de la solution.

2.54 Correction Khôlle 54 : Solution particulière maximale

Retour à Khôlle 54 : Solution particulière maximale.

Exercise 2.167 (Question de cours)**.** Pour résoudre une telle équation, on commencera par résoudre sur chaque intervalle ou a ne s'annule pas. Ensuite, on essayera de recoller les solutions aux points où a s'annule de sorte à ce que la solution soit $\mathcal{C}^1$ (ou simplement dérivable selon ce que l'on souhaite). Regarder l'équation au point d'annulation de a donne la valeur de la solution en ce point. On essaye ensuite d'appliquer la continuité en ce point, puis la continue dérivabilité pour trouver les constantes qui fonctionnent. (Assez souvent, on se rend compte que $x \mapsto 0$ est la seule solution, malheureusement...)

Exercise 2.168 (Problème principal)**.** On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et (I, f) l'unique solution maximale associée. Si $y_0 = 0$, alors la solution $f = 0$ et $I = \mathbb{R}$ convient, et par unicité, on a $(I, f) = (\mathbb{R}, x \mapsto 0)$. On se place du coup dans le cas ou f ne s'annule pas sur I :

$$\frac{f'}{f} - \frac{1}{f} = x^2$$

Dès lors, $g = {}^1/_f$ vérifie $g' + g = x^2$. En intégrant, il existe λ : $g(x) = \lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2$. Or on a aussi $g(x_0) = {}^1/_{y_0}$, donc $\lambda = e^{x_0}\left(\frac{1}{y_0} + x_0^2 - 2x_0 + 2\right)$.

Finalement, $f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$ sur le plus grand intervalle (contenant x_0) sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.

Ce raisonnement permet de traiter les équations différentielles, dites de Bernoulli, de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^n$.

Exercise 2.169 (Question subsidiaire)**.** On pose F une primitive de $t \mapsto tg(t)$ et G une de $t \mapsto g(t)$. On a alors $g(x) = xG(x) - xG(0) - F(x) + F(0) + f(x)$.

En dérivant deux fois, on obtient que g est solution au problème de Cauchy $g''(x) - g(x) = f''(x)$ et $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. De fait, si une solution existe, alors elle est unique (attention, elle n'existe pas forcément).

Les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{-x} + \mu e^x$, donc pour $f = \cos$, on obtient $g'' - g = -\cos$, puis $g(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^x + \frac{1}{2}\cos x$. Avec les conditions initiales, on trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$, d'où $g(x) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x)$.

Retour à Khôlle 54 : Solution particulière maximale.

2.55 Correction Khôlle 55 : Action de groupe

Retour à Khôlle 55 : Action de groupe.

Exercise 2.170 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.171 (Problème principal)**.** φ définit ce qu'on appelle une action de G sur X.

1. On a $x \sim_G x$ car $\varphi(x, e) = x$.
2. Si $x \sim_G y$, alors il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g, x)$. Dans ce cas, on a $\varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \star g, x) = \varphi(e, x) = x$, d'où la symétrie.
3. Si $x \sim_G y$ et $y \sim_G z$, alors soit $g, h \in G$ tels que $y = \varphi(g, x)$ et $z = \varphi(h, y)$, alors $\varphi(h \star g, x) = \varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(h, y) = z$. Ainsi $\sim_G$ est transitif.

On a bien une relation d'équivalence.

En réalité, on connaît déjà plein d'actions de groupe. Par exemple, l'action du groupe des rotations de l'espace qui laisse inchangé un cube ou un tétraèdre sur les sommets de ce dernier ; ou l'action du groupe des permutations sur $[1, n]$; ou l'action du groupe des translation (ou de quelque transformations géométriques que ce soit) sur les points du plan.

Exercise 2.172 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.153.

Retour à Khôlle 55 : Action de groupe.

2.56 Correction Khôlle 56 : Sous-groupe distingué

Retour à Khôlle 56 : Sous-groupe distingué.

Exercise 2.173 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.174 (Problème principal)**.** On doit montrez que $\forall g \in G, x \in \text{Ker } \varphi, g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Or, on a avec ces notations :

$$\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(x)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_H$$

On a utilisé $\varphi(x) = e_H$. Ainsi, $g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Ker φ est bien distingué dans G car c'est un sous-groupe de G stable par conjugaison.

Exercise 2.175 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.156.

Retour à Khôlle 56 : Sous-groupe distingué.

2.57 Correction Khôlle 57 : Moyenne harmonique

Retour à Khôlle 57 : Moyenne harmonique.

Exercise 2.176 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.177 (Problème principal)**.** Il s'agit de la moyenne harmonique : $\frac{1}{x \star y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

La loi est interne (car $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ pour $x, y > 1$), commutative, d'élément neutre 0, d'inverse $-x$, et associative car :

$$\frac{1}{(x \star y) \star z} = \frac{1}{x \star y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

La dernière expression est symétrique en x, y, z donc la loi est associative. On a bien un groupe abélien.

On peut faire de même avec la moyenne (arithmétique) : $x \star y = \frac{x+y}{2}$; la moyenne géométrique : $x \star y = \sqrt{xy}$; la moyenne quadratique : $x \star y = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$; et la moyenne arithmético-géométrique.

Exercise 2.178 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.159.

Retour à Khôlle 57 : Moyenne harmonique.

2.58 Correction Khôlle 58 : Avant l'addition

Retour à Khôlle 58 : Avant l'addition.

Exercise 2.179 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.180 (Problème principal)**.** On note cette nouvelle loi $\heartsuit$. On veut calculer $x\heartsuit y$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. **Attention, $\heartsuit$ n'est pas associative.** On considère que $((\ldots(x\heartsuit x)\heartsuit x)\ldots\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$ où n est le nombre d'occurrences de x dans le membre de gauche.

Dès lors, $x\heartsuit x = x+2$, puis $(x+2)\heartsuit x = (x\heartsuit x)\heartsuit x = x+3$, et ainsi de suite : $(x+k)\heartsuit x = x+(k+1)$ pour $k \geq 2$.

On connaît déjà beaucoup de valeurs de $x\heartsuit y$, on peut conjecturer une formule générale, par exemple : $x\heartsuit y = \max(x, y) + 1$. Vérifions que cela fonctionne : $((\ldots(x\heartsuit x)\heartsuit x)\ldots\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$ est bien vérifié. La loi ainsi définie est commutative mais pas associative (car $0\heartsuit(0\heartsuit 3) = 0\heartsuit 4 = 5$ alors que $(0\heartsuit 0)\heartsuit 3 = 2\heartsuit 3 = 4$). Il n'y a pas d'élément neutre.

On aurait pu faire d'autres choix pour une loi générale, par contre, elle n'aurait pas été associative, car sinon, on aurait pu écrire : $x = 1\heartsuit 1\heartsuit\ldots\heartsuit 1$ avec $x-1$ fois 1 ; puis $x\heartsuit x = (1\heartsuit\ldots\heartsuit 1)\heartsuit(1\heartsuit\ldots\heartsuit 1) = 1+(x-1)+(x-1) \neq x+2$, en se débarrassant des parenthèse grâce à l'associativité.

Il ne peut pas non plus y avoir d'élément neutre (ni à droite, ni à gauche) car sinon $e\heartsuit e = e$. Or on sait que $x\heartsuit x = x \neq x$ pour tout x. (La recherche d'inverse est hors de propos.)

Reste la commutativité : peut-on définir des lois qui qui ne soient pas commutatives mais respectent $((\ldots(x\heartsuit x)\heartsuit x)\ldots\heartsuit x)\heartsuit x = x+n$? Oui, on peut par exemple simplement prendre 0 pour toutes les valeurs de $x\heartsuit y$ qui ne sont pas imposées par la règle (à savoir $(x+1)\heartsuit x = 0$ et $x\heartsuit y = 0$ pour $y < x$). Cela donne une opération qui "précède l'addition" et qui n'est pas commutative.

N.B. : On aurait pu choisir un autre parenthésage pour discuter de la non-associativité. Chaque parenthésage donne possiblement une loi différente (ou bien n'admet aucune loi).

Exercise 2.181 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.163.

Retour à Khôlle 58 : Avant l'addition.

2.59 Correction Khôlle 59 : Partition en deux copies d'un sous-groupe

Retour à Khôlle 59 : Partition en deux copies d'un sous-groupe.

Exercise 2.182 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.183 (Problème principal)**.** On doit montrer que $\forall x \in G, h \in H, xhx^{-1} \in H$. On fixe $g \in G$ tel que $H \cup gH = G$ et $H \cap gH = \emptyset$.

Si $x \in H$, alors on a évidement $xhx^{-1} \in H$ car H est un groupe. Sinon, il existe $h' \in H$ tel que $x = gh'$. On a alors :

$$xhx^{-1} = gh'hh'^{-1}g^{-1}$$

Or, si le dernier élément appartient à gH, alors il exite $h'' \in H$ tel que : $gh'hh'^{-1}g^{-1} = gh''$; d'où : $g = \left(h'' \left(h'hh'^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \in H$. Or cela est impossible car $g = g.e \in gH$ et $gH \cap H = \emptyset$. Ainsi, $gh'hh'^{-1}g^{-1} \in H$, et finalement H est distingué dans G.

Exercise 2.184 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.165.

Retour à Khôlle 59 : Partition en deux copies d'un sous-groupe.

2.60 Correction Khôlle 60 : Loi exponentielle

Retour à Khôlle 60 : Loi exponentielle.

Exercise 2.185 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.186 (Problème principal)**.** La loi est :

1. Interne : c'est évident.
2. Associative : $[(x, y) \star (z, t)] \star (u, v) = (x+z+u, (ye^z + te^{-x})e^u + ve^{-x-z}) = (x + z + u, ye^{z+u} + (te^u + ve^{-z})e^{-x}) = (x, y) \star [(z, t) \star (u, v)]$
3. Élément neutre : $(0, 0)$, il suffit de vérifier.
4. Inverse : $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$, il suffit de vérifier.
5. (Non-)commutative : $(0, 1) \star (1, 0) = (1, e^{-1})$ alors que $(0, 1) \star (1, 0) = (1, e^{+1})$.

On obtient bien un groupe non-abélien.

Si $\{(x, f(x); x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour cette loi, avec f dérivable, alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)e^y + f(y)e^{-x}$$

On en déduit tout d'abord que $f(0) = 0$ (car $f(x + 0) = f(x) \times 1 + f(0)e^{-x}$ pour tout x). Ensuite, si on dérive par rapport à y, on obtient :

$$\forall x, y, f'(x + y) = f(x)e^y + f'(y)e^{-x}$$

En particulier, en $y = 0$: $f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}$. Cela veut dire que f est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0, f'(0) = \mu \\ f' - f = \mu e^{-x} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x - \frac{\mu}{2}e^{-x}$. D'après la condition initiale, on a : $2\lambda - \mu = 0$.

Réciproquement, toute les fonctions $g : x \mapsto \alpha \sinh x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifient $\forall x, y, g(x+y) = g(x)e^y + g(y)e^{-x}$, et donc $\{(x, g(x); x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour $\star$.

Exercise 2.187 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.168.

Retour à Khôlle 60 : Loi exponentielle.

2.61 Correction Khôlle 61 : Densité par la moyenne

Retour à Khôlle 61 : Densité par la moyenne.

Exercise 2.188 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.189 (Problème principal)**.** Soient $x < y \in \mathbb{R}$. On peut trouver $a, b \in A$ tels que $a < x < y < b$. On pose les suites réelles $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(m_n)_n$ définies ainsi : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour n fixé, soit $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, si $m_n < x$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$, si $m_n > y$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, si $m_n \in [x, y]$, on s'arrête. Grâce à la propriété de moyennage de A, on sait que $\forall n, a_n, b_n, m_n \in A$. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}, m_N \in [x, y]$.

Raisonnons par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors $\forall n, a_n, b_n \notin [x, y]$. De fait, la récurrence garantit que $a_n < x < y < b_n$, donc $0 < y - x < b_n - a_n$. Or $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \to 0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, il existe un N tel que $m_N \in [x, y]$, donc $A \cap [x, y] \neq \emptyset$.

Exercise 2.190 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.183.

Retour à Khôlle 61 : Densité par la moyenne.

2.62 Correction Khôlle 62 : Morphisme de corps

Retour à Khôlle 62 : Morphisme de corps.

Exercise 2.191 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.192 (Problème principal)**.** Le noyau d'un morphisme de corps $\sigma : k \to K$ est un groupe car un morphisme de corps est en particulier un morphisme de groupes (additifs). En outre, soit $\alpha \in k$ et $x \in \operatorname{Ker} \sigma$, alors $\sigma(\alpha x) = \sigma(\alpha)\sigma(x) = 0_K$ car σ est multiplicative sur le corps k. Donc $\operatorname{Ker} \sigma$ est un idéal de k.

Soit $I \subset k$ un idéal. Si $1_k \in I$, alors $I = k$ car $\alpha \times 1_k \in I$ pour tout $\alpha \in k$. Mais si $x \neq 0_k \in I$, alors $x^{-1} \in k$ car k est un corps, donc $x^{-1} \times x = 1 \in I$, puis $I = k$ comme on vient de le montrer. Ainsi si $I \neq k$, alors $I \subset \{0_k\}$, donc $I = \{0_k\}$ car I est non vide.

Si σ est un morphisme de corps non-nul, alors Ker $\sigma \neq k$ est un idéal de k, c'est donc l'idéal nul par le raisonnement précédent. Dès lors, σ est (en particulier) un morphisme de groupe de noyau nul : σ est injectif. En outre, son image $\sigma(k) \subset K$ est un corps, donc un sous-corps de K. Ainsi, σ définit un isomorphisme de corps de k vers un sous-corps de K.

Exercise 2.193 (Question subsidiaire)**.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Comme $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, puis (toujours par stricte croissance ce la racine cubique) : $x < r^3 < y$. Ainsi, l'ensemble $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Retour à Khôlle 62 : Morphisme de corps.

2.63 Correction Khôlle 63 : Borne supérieure pour les rationnels ?

Retour à Khôlle 63 : Borne supérieure pour les rationnels ?.

Exercise 2.194 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.195 (Problème principal)**.** On a évidemment $0 \in A$, et si $|x| \geq 2$, alors $x^2 \geq 4 > 2$, donc $A \subset [-2, 2]$ est borné.

Si A admet une borne supérieure, alors cela signifie que $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$ admet un minimum. Or si on note $m = \frac{a}{b}$ ce minimum. Soit n assez grand pour que $0 < \frac{1}{n} < m - \sqrt{2}$. Alors $m - \frac{1}{n} \in B$ car $\left(m - \frac{1}{n}\right)^2 > \sqrt{2}^2 = 2$. Seulement $m - \frac{1}{n} < m$, ce qui contredit la définition de m.

Ainsi A n'a pas de borne supérieure.

Exercise 2.196 (Question subsidiaire)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x-a|; a \in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide car A est non vide et minorée par 0, donc il admet un borne inférieure par l'axiome de la topologie réelle. Ainsi, d_A est bien définie. On remarque que si $x \in A$, alors $0 \in \{|x-a|; a \in A\}$, donc $d_A(x) = 0$. En outre, $d_A(x) \geq 0$ grâce à la valeur absolue.

Soit $a \in A$, grâce à l'inégalité triangulaire, on a : $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$, donc $d_A(x) \leq |x-y| + d_A(y)$. Pareillement, on peut échanger les rôles de x et y et on obtient finalement : $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x-y|$. Une application respectant une telle propriété est appelée 1-lipchitzienne (voire cours sur la continuité).

Retour à Khôlle 63 : Borne supérieure pour les rationnels ?.

2.64 Correction Khôlle 64 : Lemme de Cousin

Retour à Khôlle 64 : Lemme de Cousin.

Exercise 2.197 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.198 (Problème principal)**.** C'est un exercice assez difficile...

On construit $C = \{y \in [a,b]; [a,y] \text{ possède une subdivision}\}$ ($[a,y]$ est dite δ-fine), on va montrer que $b \in C$. On sait que C est non vide car $a \in C$ (on peut subdiviser $\{a\}$ par $x_0 = a$ et $t_0 = a$). En outre, C est majoré par b. on note c sa borne supérieure. On va montrer que $c \in C$.

Supposons $c \notin C$. Soit $c - \delta(c) < d < c$ tel que $d \in C$ (ce qui existe car c est a borne supérieure de C). Soit $x_0, ..., x_n$ une subdivision de $[a,d]$ avec $t_0, ..., t_n$. On pose $x_{n+1} = c$ et $t_{n+1} = c$, on obtient que $[a,c]$ est δ-fine : $c \in C$.

Maintenant, si $c < b$, alors soit e tel que $c < e < b$ et $e - \delta(e) < c$, on peut refaire le même raisonnement te prouver que $e \in C$, ce qui contredit la majoration de C par c. De fait, $c = b$ et $[a,b]$ est δ-fine.

En réalité, cette propriété équivaut à l'axiome de la borne supérieure, et il est parfois plus pratique de raisonner avec cette formulation.

Exercise 2.199 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.174.

Retour à Khôlle 64 : Lemme de Cousin.

2.65 Correction Khôlle 65 : Irrationalité de la constante de Néper

Retour à Khôlle 65 : Irrationalité de la constante de Néper.

Exercise 2.200 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.201 (Problème principal)**.** On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité $e = \sum_0^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$ est évidente ($e = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t$).

Supposons l'égalité vérifiée pour un n donné. Dans ce cas, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 - (-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient l'égalité souhaitée.

Ainsi : $0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Si on suppose $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire que pour tout n : $0 < an! - b \sum_0^n \frac{n}{k!} < \frac{3b}{n+1}$. En particulier, avec $n = 3b$:

$$0 < an! - b \sum_0^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < 1$$

Or on vient d'encadrer un entier entre 0 et 1, ce qui n'est pas possible, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 2.202 (Question subsidiaire)**.** On note $K = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- K est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ car K est stable par addition, contient $0(= 0 + 0\sqrt{2})$ et contient les opposés : $-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2}$.
- K est stable par multiplication : $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$.
- Si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$, sans quoi on pourrait écrire $\sqrt{2} = -{}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$.
- K contient $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.
- K contient ses inverses : pour $a, b \in \mathbb{Q}$, on pose $c = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $d = \frac{-b}{a^- 2b^2}$, puis on vérifie que $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = 1$.

Il s'agit en réalité d'un fait bien plus général, fondement de la théorie des nombres : si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de coefficient dominant 1 et irréductible dans $\mathbb{Q}$ (voir le cours de polynômes), et $\alpha \in \mathbb{C}$ un racine de P, alors $\mathbb{Q}(\alpha) = \{Q(\alpha); Q \in \mathbb{Q}(X)\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Retour à Khôlle 65 : Irrationalité de la constante de Néper.

2.66 Correction Khôlle 66 : Théorème de Beatty

Retour à Khôlle 66 : Théorème de Beatty.

Exercise 2.203 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.204 (Problème principal)**.** On introduit $a_n(x) = \#\left(A(x) \cap [1, n]\right)$ et idem pour y.

Soit $k \geq \frac{n+1}{x}$, alors $\lfloor kx \rfloor \geq kx \geq n + 1$, donc $a_n(x) \leq \frac{n+1}{x}$. De la même manière, si $k \leq \frac{n+1}{x} - 1$, alors $\lfloor kx \rfloor \leq kx \leq n + 1 - x$, et comme $\lfloor kx \rfloor$ est un entier, on a bien $\lfloor kx \rfloor \leq n$, ce qui induit : $a_n(x) \geq \frac{n+1}{x} - 1$. On obtient l'inégalité (qui vaut aussi pour y) :

$$a_n(x) \leq \frac{n+1}{x} \leq a_n(x) + 1$$

De fait, en retournant les inégalités, on obtient $\frac{a_n(x)}{n} \to \frac{1}{x}$, et si $(A(x), A(y))$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on doit avoir : $a_n(x) + a_n(y) = n$, donc en passant à la limite : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. En outre, si x (ou y) appartient à $\mathbb{Q}$, alors l'autre aussi, et en posant $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$, on a $\lfloor p_2 q_1 x \rfloor = \lfloor p_1 q_2 y \rfloor (= p_1 p_2)$, ce qui n'est pas.

Réciproquement, on suppose que $x, y \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, et (par l'absurde) que $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$. Dans ce cas, soit $k = \lfloor nx \rfloor = \lfloor ym \rfloor$, Grâce aux inégalités usuelles, on obtient $k \leq n + m < k + 1$. Comme k, n et m sont des entiers, cela induit $k = n + m$, puis $k = nx$ et $k = ny$, ce qui contredit le caractère irrationnel de x et y. Soit maintenant $k = \lfloor nx \rfloor$, on veut montrez que toutes les valeurs $j \leq k$ sont dans $A(x) \cup A(y)$, c'est à dire qu'on veut montrer que

$\#\left(A(x) \cup A(y)\right) = k$. On pose m tel que $\lfloor my \rfloor < k < \lfloor (m+1)y \rfloor$ (on a déjà prouvé qu'il ne pouvait pas y avoir égalité car $A(x) \cap A(y) = \emptyset$). Comme $x, y > 1$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ et $n \mapsto \lfloor ny \rfloor$ sont strictement croissante, donc il y a $n + m$ valeurs dans $A(x) \cup A(y)$ qui sont $\leq k$. Or on a :

$$\frac{k}{x} \leq n < \frac{k+1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{k}{y} - 1 < m < \frac{k+1}{y}$$

En additionnant, on trouve : $k - 1 < n + m < k + 1$, d'où $k = n + m$, ce qui conclut.

Ce théorème permet d'assurer qu'on a toujours un moyen de proposer une partie qu'on est sûr de pouvoir gagner au jeu de Wythoff.

Exercise 2.205 (Question subsidiaire)**.** On sais que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels et on note $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. On a $\left(\alpha - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, puis $\left(\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6\right)^2 = 60$ et enfin :

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)$$

Dès lors, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $\alpha = 0$ ou $\alpha = 6$, sans quoi on pourrait écrire $\sqrt{2}$ comme une fraction rationnelle de α, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Comme $\alpha^2 > 2 + 3 + 5 = 10 > 6 > 0$, on obtient donc que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Retour à Khôlle 66 : Théorème de Beatty.

2.67 Correction Khôlle 67 : Densité de la différence de deux suites

Retour à Khôlle 67 : Densité de la différence de deux suites.

Exercise 2.206 (Question de cours)**. Cf cours !** Attention, une suite (strictement) croissante est soit convergente (si et seulement si elle si bornée), soit elle tend vers $+\infty$ (si et seulement si elle n'est pas bornée). Par contraposée, on en déduit par exemple qu'une suite divergente qui ne tend pas vers $+\infty$ possède un rang n tel que $u_{n+1} < u_n$.

Exercise 2.207 (Problème principal)**.** On peut par exemple penser à $(\log n)_n$ ou à $(\sqrt{n})_n$.

Soit $p = \min_{k > n_0 \text{ et } u_k > x}$ (partie non-vide de $\mathbb{N}$ car $u_n \to +\infty$). Alors $x \in [u_{p-1}, u_p]$, et comme $p - 1 \geq n_0$, $|u_p - u_{p-1}| \leq \varepsilon$, donc $0 \leq u_p - x \leq \varepsilon$ (attention au cas $p = n_0 + 1$).

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit n_0 défini comme précédent (pour u_n). Soit m tel que $x + v_m \geq u_{n_0}$, ce qui existe car $v_m \to +\infty$. En appliquant le paragraphe précédent, on obtient l'existence de p tel que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$, d'où la densité.

Soit $x \in [0, 1]$. On pose $(v_n)_n = (\lfloor u_n \rfloor)_n \to +\infty$. On obtient donc l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ de m, p tels que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$. Cela induit $u_p - v_m \in [0, 1[$, puis $v_m = \lfloor u_p \rfloor$ nécessairement. On obtient bien a densité de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_n$ dans $[0, 1]$.

Exercise 2.208 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.196.

Retour à Khôlle 67 : Densité de la différence de deux suites.

2.68 Correction Khôlle 68 : Piles de cartes

Retour à Khôlle 68 : Piles de cartes.

Exercise 2.209 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.210 (Problème principal)**.** Toute la solution est sur cette vidéo.

Exercise 2.211 (Question subsidiaire)**.** On rappelle la définition d'une suite de Cauchy : c'est une suite telle que $\sup_{m,p\geq n} |u_m - u_p| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy réelle. $(u_n)_n$ est en particulier bornée car il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < +\infty$ (sans quoi cela ne pourrait tendre vers 0). On nomme M cette valeur. On a alors $\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_N| + |u_n - u_N| \leq |u_N| + M$. Donc $(u_n)_n$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une extraction convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$. D'où la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Réciproquement, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors, pour $\varepsilon > 0$, on pose N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Alors, soit $m, p \geq N$, on a $|u_m - u_p| \geq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon, \exists N, \sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a équivalence de *converger* et *être une suite de Cauchy*, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ par exemple. $\mathbb{R}$ est ce qu'on appelle un corps *complet*.

Retour à Khôlle 68 : Piles de cartes.

2.69 Correction Khôlle 69 : Variation de la constante pour les suites

Retour à Khôlle 69 : Variation de la constante pour les suites.

Exercise 2.212 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.213 (Problème principal)**.** Pour $(v_n)_n$, on a le produit télescopique : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_0}$ d'une part. D'autre part : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \prod_k (k + 1)! = n!$. Ainsi : $v_n = Cn!$.

En injectant $C(n)n!$ dans l'égalité, on obtient immédiatement :

$$C(n+1) - C(n) = 2^n$$

Cela donne la somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} C(k+1) - C(k) = C(n) - C(0) = 2^n - 1$. Comme on veut que $u_n = (C(0) + 2^n - 1)n!$, on obtient $C(0) = u_0$ et finalement $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$

Pour la deuxième récurrence, on peut faire exactement la même chose : on cherche d'abord $(v_n)_n$ telle que $v_{n+1} - 3^{2n}v_n = 0$, ce qui donne $v_n = 3^{n(n-1)}v_0$. On cherche ensuite les solution à la récurrence de la forme $C(n)3^{n(n-1)}$, ce qui donne $C(n+1) - C(n) = 3^{-n}$ et finalement, en regardant la condition initiale :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right)3^{n(n-1)}$$

Exercise 2.214 (Question subsidiaire)**.** On pose la fonction $f : \alpha \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sin n\alpha|$, qui est bien définie par l'axiome de la borne supérieure.

- Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$: $f(\alpha) \geq \sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3})$.
- Si $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$: Soit n_0 tel que $(n_0 - 1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$. Alors les inégalités garantissent $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Si $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$: on note que $\pi - \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha) = \sup_n |\sin(n\alpha)| = \sup_n |\sin(n(\pi - \alpha))| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, on vient de prouver que l'inf est atteint (c'est un minimum) et vaut $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Retour à Khôlle 69 : Variation de la constante pour les suites.

2.70 Correction Khôlle 70 : Moyenne arithmético-géométrique

Retour à Khôlle 70 : Moyenne arithmético-géométrique.

Exercise 2.215 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.216 (Problème principal)**.** Premièrement, $v_n \leq u_n$ car $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2}{2}$. Cela induit que $(u_n)_n$ est décroissante (car $u_{n+1} = \frac{v_n+u_n}{2} \geq \frac{u_n+u_n}{2} = u_n$) et $(v_n)_n$ est croissante (car $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$. En outre, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ donc $0 \leq u_n - v_n \leq 2^{-n}(u_0 - v_0) \to 0$. D'où le caractère adjacent de ces suites.

Par sa définition, on a $M(x,y) = M\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = M\left(\frac{y+x}{2}, \sqrt{yx}\right) = M(y,x)$. M est bien symétrique. Ensuite, si on pose $u_0' = tx$ et $v_0' = ty$, alors on peut prouver par récurrence que $u_n' = tu_n$ et $v_n' = tv_n$. Ainsi, la limite commune de $(u_n')_n$ et $(v_n')_n$ vaut t fois celle de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$: $M(tx,ty) = tM(x,y)$. Enfin, on a déjà prouvé l'inégalité grâce au caractère adjacent des deux suites, reste le cas d'égalité. S'il y a égalité, alors en particulier l'une des deux suites $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ est stationnaire. Il s'ensuit que x et y son égaux car on aurait $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ (ce qui induit $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} = 0$).

Pour l'intégrale elliptique, voire ici.

Exercise 2.217 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.205.

Retour à Khôlle 70 : Moyenne arithmético-géométrique.

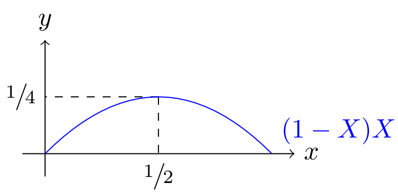
2.71 Correction Khôlle 71 : Théorème de Beatty

Retour à Khôlle 71 : Théorème de Beatty.

Exercise 2.218 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.219 (Problème principal)**.** Cf Exercise 1.204.

Exercise 2.220 (Question subsidiaire)**.** Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors on a $(1-\ell)\ell \geq \frac{1}{4}$. Or comme $\ell \in [0,1]$, par l'analyse du polynôme $(1-X)X$, on obtient que $\ell = \frac{1}{2}$ est la seule valeur possible.



Reste à prouver la convergence. On sait que $(u_n)_n$ est minorée par 0. En outre :

$$\begin{aligned} u_n(1-u_n) &= {}^1\!/\!_4 - ({}^1\!/\!_2 - u_n)^2 \\ &\leq {}^1\!/\!_4 < u_{n+1}(1-u_n) \end{aligned}$$

Comme $1 - u_n > 0$, on obtient que $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi, elle converge.

Retour à Khôlle 71 : Théorème de Beatty.

2.72 Correction Khôlle 72 : Césaro multiplicatif

Retour à Khôlle 72 : Césaro multiplicatif.

Exercise 2.221 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.222 (Problème principal)**.** Ou bien on revient aux suite de Césaro en appliquant le logarithme, ou on refait la démonstration comme il suit (ici $\ell > 0$, on laisse le lecteur faire le cas $\ell = 0$).

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. On a alors par produit : $u_N (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N (\ell + \varepsilon)^{n-N}$. En passant à la $\sqrt[n]{\ldots}$, on obtient :

$$u_N^{1/n} (\ell - \varepsilon)^{1-N/n} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{1/n} (\ell + \varepsilon)^{1-N/n}$$

Par encadrement et passage à la limite, on obtient l'existence d'un $\tilde{N}$ tel que $\forall n \geq \tilde{N}, \ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Ainsi, $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

La réciproque est fausse, on peut par exemple créer la suite suivante : on prend a, b deux réels positifs différents, $u_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ u_{n+1} = bu_n & \text{si} \quad n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors, $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ ne converge pas (cela vaut alternativement a puis b), alors que $\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{2n}{2n+1}} \to \sqrt{ab}$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab}$.

Pour $u_n = \binom{2n}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$, donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, donc $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \to \frac{27}{e}$, donc $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \to \frac{27}{e}$ quand $n \to +\infty$.

Exercise 2.223 (Question subsidiaire)**.** On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_n = 0$ si n n'est pas premier, et $u_p = 1$ pour tout p premier (on pourra noter $(\mathbb{1}_{\mathcal{P}}(n))_n$). Dans ce cas, $(u_{kn})_n$ est nulle pour $n \geq 2$, donc $\forall k \neq 1, u_{kn} \to 0$. Cependant, $(u_n)_n$ ne peut converger car elle possède une suite extraite $(u_p)_{p \in \mathcal{P}}$ qui tend vers 1. Elle a donc 2 valeurs d'adhérence.

Retour à Khôlle 72 : Césaro multiplicatif.

2.73 Correction Khôlle 73 : Comparaison avec une fonction non-explicite

Retour à Khôlle 73 : Comparaison avec une fonction non-explicite.

Exercise 2.224 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.225 (Problème principal)**.** On a : $\forall t \in [0, x], t^2 \leq tx$, donc :

$$0 \leq \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^x e^{tx} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(e^{x^2} - 1\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, on a donc $\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t = o\left(e^{x^2}\right)$

Exercise 2.226 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.220.

Retour à Khôlle 73 : Comparaison avec une fonction non-explicite.

2.74 Correction Khôlle 74 : Développement d'un raccord de fonction

Retour à Khôlle 74 : Développement d'un raccord de fonction.

Exercise 2.227 (Question de cours)**.** **Cf cours !**

Exercise 2.228 (Problème principal)**.** On écrit le développement en 0^+ de f : pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^+ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

De la même manière, pour $x < 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^- en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Finalement, comme les prolongements ont le même développement limité en 0^- et en 0^+, la fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en entier, avec pour développement limité en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$.

Exercise 2.229 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.207.

Retour à Khôlle 74 : Développement d'un raccord de fonction.

2.75 Correction Khôlle 75 : Développement d'une intégrale

Retour à Khôlle 75 : Développement d'une intégrale.

Exercise 2.230 (Question de cours)**.** **Cf cours !** Démonstration non-exigée.

Exercise 2.231 (Problème principal)**.** En notant F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on a : $f(x) = F(x^2) - F(x)$ et f est dérivable, avec :

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

En intégrant, on obtient : $f(x) = f(0) - x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$. Un calcul rapide donne $f(0) = 0$.

Exercise 2.232 (Question subsidiaire)**.** Après quelques expérimentations sur les premiers termes de la suite, on se rend compte qu'on doit pouvoir prouver que $\forall n, \forall k \geq 2^n, u_k \leq {}^1/_{2^n}$. Cela se montre efficacement par récurrence.

Supposons que cette propriété soit vérifiée pour un n fixé. Soit $k \geq 2^{n+1}$, on sait que $2u_k$ est inférieur à au moins $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ termes des $u_1, ..., u_{k-1}$. De fait, $2u_k$ est inférieur à au moins 2^n termes (car $k \geq 2^{n+1}$), et l'un d'entre eux est nécessairement un terme d'indice $\geq 2^n$ (sans quoi on aurait 2^n nombres entre 1 et $2^n - 1$). Ainsi, par hypothèse de récurrence : $2u_k \leq {}^1/_{2^n}$, puis : $u_k \leq {}^1/_{2^{n+1}}$.

Finalement, on a montré que $(u_n)_n$ est majorée par la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n, \forall k \in [2^n, 2^{n+1}[, v_k = {}^1/_{2^n}$. Cette suite tend évidemment vers 0, et donc u_n aussi. Pour le voir, soit on peut montrer que $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, 0 \leq v_n \leq \varepsilon$, soit on peut voir que $(v_n)_n$ est une suite décroissante minorée (par 0), donc convergente ; et que sa suite extraite $(v_{2^n})_n = ({}^1/_{2^n})_n$ tend vers 0.

Retour à Khôlle 75 : Développement d'une intégrale.

2.76 Correction Khôlle 76 : Développement d'une réciproque

Retour à Khôlle 76 : Développement d'une réciproque.

Exercise 2.233 (Question de cours)**. Cf cours !** On a : $\ln x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k + o(x^n)$ et $\exp x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$. Pour obtenir cosh, on prend la partie paire et sinh la partie impaire :

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Pour les fonctions trigonométriques, on prend les parties réelles et imaginaires de e^{ix} :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(2n)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(2n+1)$$

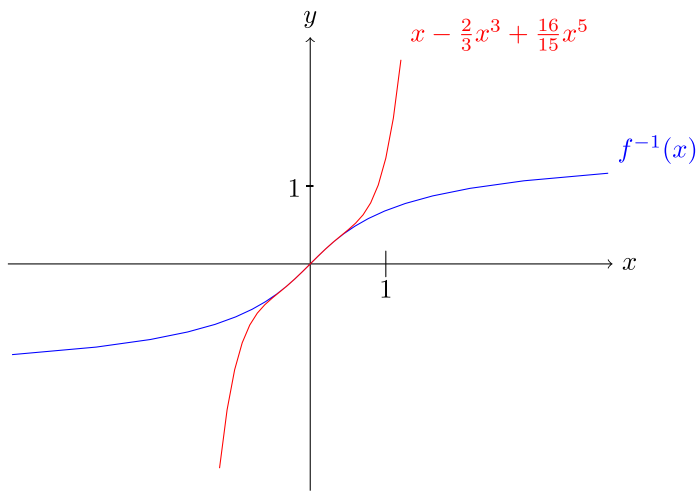
Exercise 2.234 (Problème principal)**.** f est strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\mathcal{C}^\infty$, et impaire. On a aussi : $f(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$ par un calcul de limites. f admet donc une réciproque définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, impaire et $\mathcal{C}^\infty$.

Le développement à l'ordre 6 de f en 0 est : $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$. On note en outre le développement à l'ordre 6 de f^{-1} : $f^{-1}(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)$. On sait que $f^{-1} \circ f(x) = x$, d'où, par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ \frac{2}{3}a_1 + a_3 & = 0 \\ \frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5 & = 0 \end{cases}$$

Finalement, on résout : $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{16}{15}$ et :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6)$$



Exercise 2.235 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.214.

Retour à Khôlle 76 : Développement d'une réciproque.

2.77 Correction Khôlle 77 : Approximant de Padé

Retour à Khôlle 77 : Approximant de Padé.

Exercise 2.236 (Question de cours)**. Cf cours !**

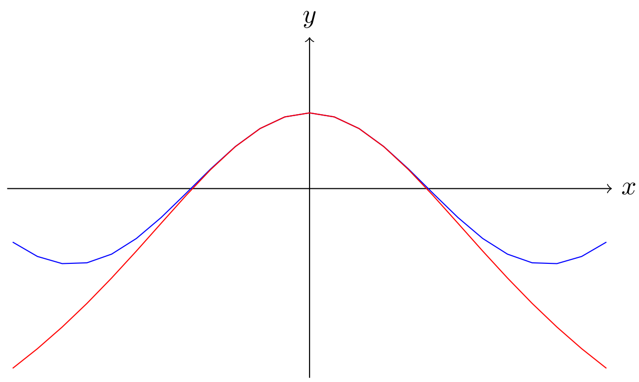
Exercise 2.237 (Problème principal)**.** On peut développer $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + b(b-a)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^7)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que si on veut que la partie principale est du plus grand degré possible, il faut d'abord que $a - b = -\frac{1}{2}$ et $b(b-a) = \frac{1}{24}$, donc :

$$a = -\frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}$$

On obtient alors : $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \sim \frac{1}{480}x^6$, et il est impossible de faire mieux.



Exercise 2.238 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.210.

Retour à Khôlle 77 : Approximant de Padé.

2.78 Correction Khôlle 78 : Équation différentielle

Retour à Khôlle 78 : Équation différentielle.

Exercise 2.239 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.240 (Problème principal)**.** Notons $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Puis :

$$2xy''(x) = \sum_{k=2}^{n+1} 2k(k-1)a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$x^2 y(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^{k+2} + o(x^n)$$

En sommant, (E) induit :

$$-a_1 + 2a_2 x + \sum_{k=2}^{n} \left((k+1)(2k-1)a_{k+1} + a_{k-2}\right) x^k = o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on trouve : $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall k \geq 2, a_{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(2k-1)} a_{k-1}$. Cela nous donne pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$ et $a_{3p} = \frac{(-1)^p 2^p}{9^p (2p)!} a_0$.

On peut constater que toutes les fonction $x \mapsto \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3} (-x)^{3/2}\right)$. On a très envie de poser le changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$ et $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$, on obtient que $z'' + z = 0$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)$$

Puis sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + B \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$$

Pour résoudre le problème de raccordement sur $\mathbb{R}$, on se rend compte grâce au développement limité qu'il faut et qu'il suffit que $\lambda = A$ et $\mu = B = 0$.

Exercise 2.241 (Question subsidiaire)**.** Soit ℓ la limite de $(u_n)_n$. On étudie $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell$:

$$v_n - \frac{n+1}{2n}\ell = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(u_k - \ell)$$

On applique alors la même méthode que afin de démontrer le théorème de Césaro, et on va montrer que $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$, c'est-à-dire : $v_n \to \ell/2$.

Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ assez grand :

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k \leq \varepsilon\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \varepsilon$$

D'autre part, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell) \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc à partir d'un certain rang $N_1 \geq N$, on a $\forall n \geq N_1, \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| \leq \varepsilon$. Finalement :

$$\forall n \geq N_1, \left|v_n - \frac{n+1}{2n}\ell\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| + \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq 2\varepsilon$$

De fait, $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$ et $v_n \to \ell/2$.

La réciproque est fausse, comme celle du théorème de Cesaro : la suite $(u_n)_n = (1, 0, 1, 0, ...)$ ne converge pas, mais on a :

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} k = \frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^2 \to \frac{1}{4}$$

Retour à Khôlle 78 : Équation différentielle.

2.79 Correction Khôlle 79 : Sous-espace déterminé par intersection et somme

Retour à Khôlle 79 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

Exercise 2.242 (Question de cours)**. Cf cours !**

En outre, pour $x, y \in E$, un espace vectoriel, on a :

$$(1+1).(x+y) = 1.(x+y) + 1.(x+y) = x+y+x+y$$

$$(1+1).(x+y) = (1+1).x + (1+1).y = x+x+y+y$$

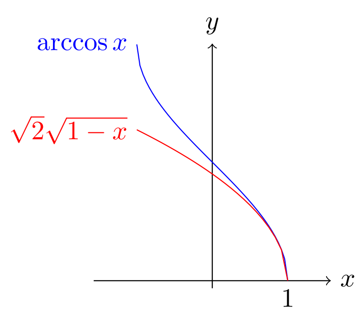
Comme $(E,+)$ est un groupe, tout élément y est régulier et on peut simplifier par x à gauche et par y à droite sur les deux lignes. On obtient : $y+x = x+y$. Finalement, $(E,+)$ est abélien, quel que soit le corps (commutatif ou non) et l'espace vectoriel choisis.

Exercise 2.243 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit x un élément de C. Alors $x \in A + C = A + B$ et il existe $(y,z) \in A \times B$ tel que $x = y + z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Exercise 2.244 (Question subsidiaire)**.** $\arccos x = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0 en 1^-), mais la fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

Puisque $\arccos x = o(1)$, on a $\arccos x \sim \sin(\arccos x)$, d'où, en 1^- :

$$\arccos x \sim \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$



Retour à Khôlle 79 : Sous-espace déterminé par intersection et somme.

2.80 Correction Khôlle 80 : Sous-espace engendré

Retour à Khôlle 80 : Sous-espace engendré.

Exercise 2.245 (Question de cours)**. Cf cours !** Une intersection d'espaces vectoriels est toujours un espace vectoriel, une réunion, rarement.

Plus précisément, si on suppose que $F \cup G$ est un espace vectoriel et que ni $F \subset G$, ni $G \subset F$, alors on peut prendre deux éléments $f \in F \backslash G$ et $g \in G \backslash F$. Par combinaison linéaire, $f + g \in F \cup G$, comme F et G sont des espaces vectoriels, ou bien $f+g \in F$ et $g = (f+g) - f \in F$ ou bien $f = (f+g) - g \in G$, ce qui n'est pas.

Exercise 2.246 (Problème principal)**.** Il suffit de montrer que $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$ et $d \in \mathrm{Vect}(a, b)$ pour avoir $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Ensuite, on montrera que $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(c, d)$. On a rapidement : $a = c + 2d$ et $b = 2c - d$. Dès lors, $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Inversement, on peut retrouver linéairement c et d en fonction de a et b en résolvant le système :

$$\begin{cases} c + 2d & = a \\ 2c - d & = b \end{cases}$$

On obtient $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$.

Pour montrer que $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$, on peut aussi chercher directement x, y tel que $c = xa + yb$, ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x - y & = 0 \\ 3x + y & = 1 \end{cases}$$

On trouve $x = {}^1\!/_5$ et $y = {}^2\!/_5$ (il faut vérifier que les 3 équations sont vérifiées par ces solutions). Ainsi, on a bien $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$. On peut procéder de même pour les trois autres appartenances.

Exercise 2.247 (Question subsidiaire)**.** On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1+x}$$

Donc, comme on connaît le développement de chacun des fractions (le développement de $\frac{1}{(1-x)^2}$ s'obtient en dérivant celui de $\frac{1}{1-x}$), on obtient pour tout n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k + 3 + (-1)^k}{4} x^k + o(x^n)$$

D'autre part, on constate que $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, donc on a aussi :

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} x^{2j} \right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+2j=k} 1 \times 1 \right) x^k + o(x^n)$$

Finalement, en identifiant les coefficients, on trouve qu'il y a $\frac{1}{4}(2k+3+(-1)^k)$ manières d'écrire k sous la forme $k = p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Retour à Khôlle 80 : Sous-espace engendré.

2.81 Correction Khôlle 81 : Évaluation des polynômes

Retour à Khôlle 81 : Évaluation des polynômes.

Exercise 2.248 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.249 (Problème principal)**.** Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on peut alors écrire les conditions données :

$$\begin{cases} -a+b-c+d & = 1 \\ a+b+c+d & = 0 \\ 8a+4b+2c+d & = 1 \end{cases}$$

On a un variable auxiliaire. On trouve par pivot :

$$\begin{cases} b & = -a - {}^1\!/_2 \\ c & = -2a + {}^1\!/_2 \\ d & = 2a \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes P tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ est $\{aX^3 - (a + \frac{1}{2})X^2 - (2a - \frac{1}{2})X + 2a; a \in \mathbb{R}\}$.

Exercise 2.250 (Question subsidiaire)**.** On a, quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Dès lors, on trouve :

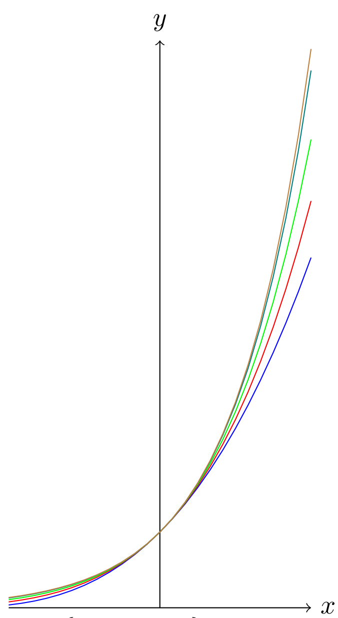
$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &= e^{a+b}\left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n}\right) - e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1 - \frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= e^{a+b}\left(\frac{1}{2n}(-(a+b)^2 + a^2 + b^2)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-abe^{a+b}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme $ab \neq 0$, on a bien trouvé un équivalent de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.

Pour estimer $e^{-a}f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$, on doit pousser un cran plus loin le développement limité de ln et de exp :

$$\begin{aligned}
e^{-a}f_n(a) &= e^{-a}\exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1 - \frac{a^2}{2n} + \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Pour $a > 0$ (et même $a \notin \{0, -8/3\}$), on a trouvé un équivalent de $e^{-a}f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$. On constatera d'ailleurs que cette suite ne converge pas très rapidement vers l'exponentielle.



$n \in \{3, 5, 10, 50\}$, $x \mapsto e^x$

Retour à Khôlle 81 : Évaluation des polynômes.

2.82 Correction Khôlle 82 : Combinaison linéaire

Retour à Khôlle 82 : Combinaison linéaire.

Exercise 2.251 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.252 (Problème principal)**.** Raisonnons par analyse-synthèse. Supposons qu'on puisse trouver λ, μ tels que $w = (\lambda, \mu, -37, -3) \in F$, soit alors x et y tels que $w = xu + yv$, on obtient en particulier le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + 4y & = -37 \\ 3x + 7y & = -3 \end{cases}$$

On trouve : $x = \frac{247}{47}$ et $y = -\frac{126}{47}$ puis $\lambda = u + 2v = \frac{-5}{47}$ et $\mu = 2u - v = \frac{620}{47}$.

Réciproquement, les valeurs ci-dessus garantissent que $(\lambda, \mu, -37, -3) = xu + yv$, donc $(\lambda, \mu, -37, -3) \in F$.

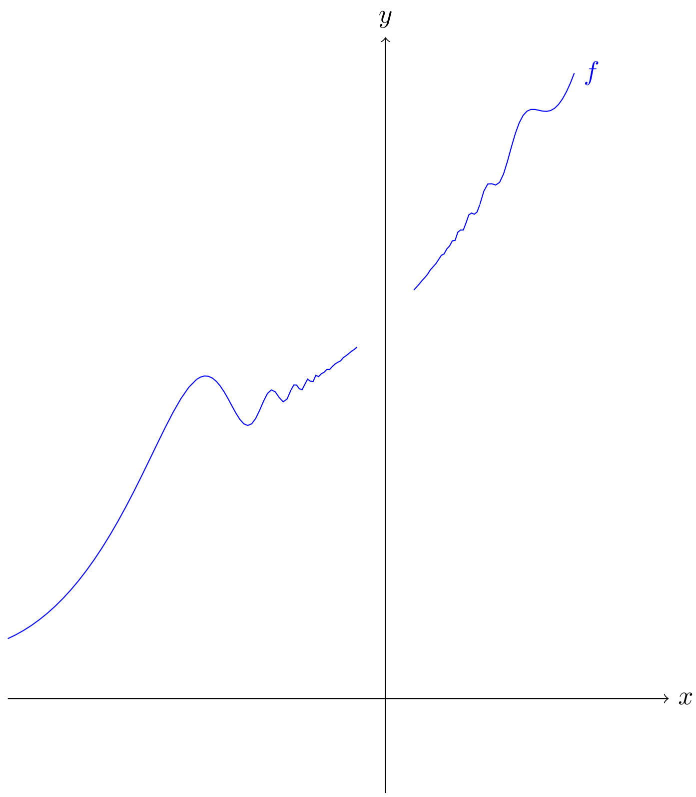
Exercise 2.253 (Question subsidiaire)**.** On a $|\sin \frac{1}{x^2}| \leq 1$, donc $x^3 \sin \frac{1}{x^2} = O(x^3) = o(x^2)$, d'où, au voisinage de 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

f est continue et dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1. On obtient au passage que $f'(0) = 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et somme. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

f' n'est donc pas continue au voisinage de 0. Pour le constater, on peut regarder que $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \to -1$ et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2n\pi}}\right) \to 1$ alors que les deux suites d'argument tendent vers 0. On ne peut donc pas trouver de développement limité d'ordre 0 pour f'.

Mon ordinateur a beaucoup de mal à tracer la courbe sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.



Retour à Khôlle 82 : Combinaison linéaire.

2.83 Correction Khôlle 83 : Espace engendré par un cône

Retour à Khôlle 83 : Espace engendré par un cône.

Exercise 2.254 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.255 (Problème principal)**.** C n'est pas un espace vectoriel car $(x \mapsto x) \in C$ mais $-(x \mapsto x) \in C$: C n'est pas stable par multiplication par les scalaires. Par contre, C est stable par somme a coefficient positifs.

Soient $(f, g, h, j) \in C$ on pose $x = f - g$ et $y = h - j$. On a $x + y = (f + h) - (g + j) \in V$, $-x = g - f \in C$, donc $(V, +)$ est un groupe. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda \geq 0$, on peut écrire : $\lambda x = (\lambda f) - (\lambda g) \in V$, si $\lambda < 0$, on peut écrire $\lambda x = (|\lambda| g) - (|\lambda| f) \in V$. Donc V est stable par multiplication par des scalaires réels. Reste à vérifier les 4 axiomes.

$$1.x = 1.f - 1.g = f - g = x$$

$$(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)f - (\lambda + \mu)g = \lambda(f - g) + \mu(f - g) = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda(x+y) = \lambda(f-g+h-j) = \lambda f - \lambda g + \lambda h - \lambda j = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda\mu)x = (\lambda\mu)f - (\lambda\mu)g = \lambda(\mu f) - \lambda(\mu g) = \lambda(\mu x)$$

Exercise 2.256 (Question subsidiaire)**.** On connaît la dérivée de $s \mapsto \arcsin x$: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On a le développement à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

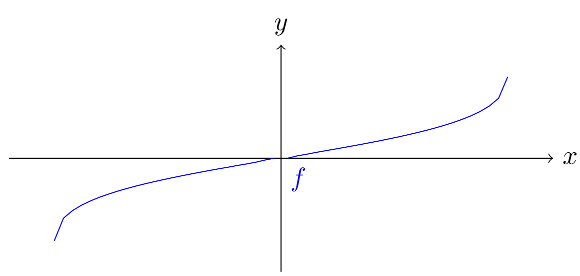
On intègre ensuite en calculant $\arcsin(0) = 0$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

Dès lors, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin x} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{40}x^4\right)^2\right) + o(x^3) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x - \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{360}x^3 + o(x^3)$, donc on peut prolonger f par $f(0) = 0$ et $\mathcal{C}_f$ admet alors une tangente en $(0,0)$ de pente $+\frac{1}{6}$. La courbe traverse (avec inflexion) sa tangente.



Retour à Khôlle 83 : Espace engendré par un cône.

2.84 Correction Khôlle 84 : Ensemble milieu

Retour à Khôlle 84 : Ensemble milieu.

Exercise 2.257 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.258 (Problème principal)**.** On nomme a_k les affixes des A_k et m_k celles de M_k. On peut écrire le système correspondant $m_n + m_1 = 2a_n$ et $m_k + m_{k+1} = 2a_k$. Donc $z_{k+1} = -z_k + 2a_k$, puis $z_n = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}a_j$. En utilisant la dernière égalité, on a donc : $2\sum_k(-1)^{n-k}a_k = (1-(-1)^n)z_1$.

On a donc deux possibilités, soit n est impair, et alors on trouve une valeur explicite pour z_1, et ainsi pour tous les autres z_k.

Si n est pair, il faut que $\sum_k(-1)^k a_k = 0$. Si c'est le cas, on obtient un système à $n-1$ équations qu'on a déjà résolu. On a une infinité de solutions. On notera que dans ce cas, le système de points A_k est centré en 0.

Exercise 2.259 (Question subsidiaire)**.** En 0, on a :

$$\begin{aligned}
x\ln f(x) &= \ln\left(\frac{1}{2}(e^{x\ln a} + e^{x\ln b})\right)\\
&= \ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b) + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) + o(x^2)\right)\\
&= 1 + x\ln\sqrt{ab} + \frac{x^2}{4}(\ln^2 a + \ln^2 b) - \frac{1}{2}\left(x\ln\sqrt{ab}\right)^2 + o(x^2)\\
&= x\ln\sqrt{ab} + \frac{x^2}{8}\ln^2\frac{a}{b} + o(x^2)\\
f(x) &= \exp\left(\ln\sqrt{ab} + \frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b} + o(x)\right) = \sqrt{ab}\left(1 + \frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}\right) + o(x)
\end{aligned}$$

f est ainsi prolongeable par $\sqrt{ab}$ en 0 et dérivable avec $f'(0) = \frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b} > 0$.

En $+\infty$, on a (avec $0 < a < b$) :

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln b^x - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{a^x}{b^x}\right)\right) \longrightarrow \ln b$$

De fait, f converge vers b.
En $-\infty$, on peut écrire $f(-x) = \frac{ab}{f(x)}$ pour conclure que $f(x) \to_{-\infty} a$.

Reste à calculer la dérivée pour $x \neq 0$. f étant strictement positive, on peut déterminer ses variations en regardant $(\ln f)'(x)$:

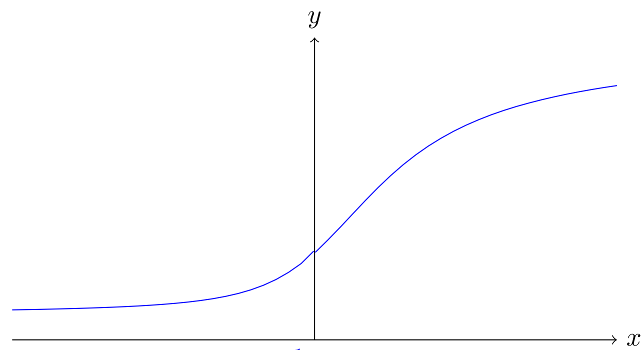
$$(\ln f)'(x) = \frac{-1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{a^x + b^x}$$

On pose $g(x) = x^2(\ln f)'(x)$ dont on cherche le signe. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$g'(x) = x\frac{(ab)^x(\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}$$

Il s'ensuit que g admet un minimum global (strict) en 0 (plus précisément sa limite en 0 est son infimum sur $\mathbb{R}$) : $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$, et ainsi $g > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $f' > 0$ et f strictement croissante.

NB : On remarquera que l'inégalité $\lim_{-\infty} f(x) < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{+\infty} f(x)$ redonne l'inégalité bien connue entre a, b et les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.



$a = \frac{1}{3},\ b = 4$

Retour à Khôlle 84 : Ensemble milieu.

2.85 Correction Khôlle 85 : Fonction vectorielle de Leibnitz

Retour à Khôlle 85 : Fonction vectorielle de Leibnitz.

Exercise 2.260 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.261 (Problème principal)**.** On a (où $\overrightarrow{MG}$ est une constante vis-à-vis de l'indice i) :

$$f(M) = \sum_i a_i(A_i - M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i G - \sum_i a_i M = \sum_i a_i \overrightarrow{MG}$$

En particulier, en regardant depuis le centre O, on a $f(O) = \sum_i a_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{OG}$. Ainsi, si on note $(g_j)_j$ les coordonnées de G dans une base de l'espace vectoriel en jeu, on a : $g_j = \frac{1}{\sum_i a_i} \sum_i a_i x_{i,j}$ où $x_{i,j}$ est la coordonnée de A_i sur le j-ième vecteur de base. Matriciellement, si on pose $A = [x_{i,j}]_{i,j}$ la matrice qui donne les coordonnées des A_i dans la base choisie, et $\vec{a}$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on peut écrire : $G = \frac{1}{\sum_i a_i}\ {}^t A.\vec{a}$.

Si $\sum_i a_i = 0$, alors on ne peut pas définir G. Par contre, la fonction f est constante : $f(M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i A_i$ (qui ne dépend pas de M). En particulier, pour j fixé, on constate que $a_j = -\sum_{i \neq j} a_i$, donc $f = \sum_i a_i A_i = \sum_{i \neq j} a_i A_i - \left(\sum_{i \neq j} a_i\right) A_j = \sum_{i \neq j} a_i \overrightarrow{A_j A_i}$; en notant G_j le centre de gravité de $\{(A_i, a_i)\}_{i \neq j}$, on a aussi $f = a_j \overrightarrow{G_j A_j}$ (cela fonctionne quel que soit j donné).

Exercise 2.262 (Question subsidiaire)**.** F est le noyau de l'application linéaire $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f$, c'est donc un sous-espace vectoriel. On peut écrire $f = \left(f - \int_0^1 f\right) + \int_0^1 f$. Le premier élément est dans F et le second est une fonction constante. Ainsi, l'espace des fonctions constantes, $G = \{x \mapsto c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$, est un supplémentaire de F car on a $E = F + G$ d'après l'égalité précédente, et $F \cap G = \{x \mapsto 0\}$ avec un rapide raisonnement.

On peut d'ailleurs remarquer que pour tout élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, on a : $F \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$, ce qu'on reverra quand on étudiera les hyperplans.

Retour à Khôlle 85 : Fonction vectorielle de Leibnitz.

2.86 Correction Khôlle 86 : Familles libres et liées

Retour à Khôlle 86 : Familles libres et liées.

Exercise 2.263 (Question de cours)**.** Comme pour tout x, $(x, u(x))$ est liée, on peut poser λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On a : $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ d'une part, et en outre : $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. En particulier, si la famille (x, y) est libre, alors on peut identifier les coefficients et on a : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Soit maintenant x fixé et S tel que $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus S$. On pose $\lambda = \lambda_x$ (qui est une quantité fixée), si $y \in S$ alors $u(y) = \lambda y$ d'après le raisonnement précédent. Si $y \in \mathrm{Vect}(x)$, soit μ le scalaire tel que $y = \mu x$, on a par linéarité $u(y) = \mu u(x) = \mu\lambda x = \lambda(\mu x) = \lambda y$. Ainsi, u est une homothétie de rapport λ.

NB : On peut aussi remarquer que (si $\dim E \geq 2$) on peut trouver deux vecteurs x et z qui sont libres. En écrivant toujours $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus S$ et $\lambda_x = \lambda$, on a $u(y) = \lambda y$; en particulier $u(z) = \lambda z$ et $\lambda_z = \lambda$; or si $y \in \mathrm{Vect}(x)$, alors (y, z) est libre, donc $\lambda_y = \lambda$ et u est bien une homothétie.

Exercise 2.264 (Problème principal)**.** Regardons chaque famille :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv + cw = \vec{0}$ (où u, v, w désignent les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ du sujet). On obtient un système de 4 équations à 3 inconnues, reste à montrer qu'il est incompatible. En ajoutant les deuxièmes et quatrième lignes, on trouve $c = 0$, puis en ajoutant la première et la troisième, on obtient $a = 0$, ce qui donne $b = 0$ pour finir. La famille est bien libre.
- Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les fonctions cos et sin. On a $f_u = (\cos u)\vec{x} + (\sin u)\vec{y}$. De fait, f_a, f_b et f_c sont 3 vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de 2 vecteurs : ils forment une famille liée.
- f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

Exercise 2.265 (Question subsidiaire)**.** Comme $v \in (F + \mathbb{K}.v) = (F + \mathbb{K}.w)$, on peut trouver $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v = x + \alpha w$. De la même manière, on peut trouver $y \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $w = y + \beta v$. Si $\alpha \neq 0$, la première égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\beta \neq 0$, la deuxième égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\alpha = \beta = 0$, alors on a $(-x-y)+v+w=0$ où $(-x-y) \in F$: on a encore gagné.

Réciproquement, si $\exists u, \alpha, \beta : u + \alpha v + \beta v = 0$ avec $\alpha\beta \neq 0$, on en déduit que $w = \frac{-1}{\beta}(u+\alpha v)$, donc $w \in F + \mathbb{K}.v$. Pareillement, $v \in F + \mathbb{K}.w$. Finalement : $F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w$.

Retour à Khôlle 86 : Familles libres et liées.

2.87 Correction Khôlle 87 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation

Retour à Khôlle 87 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation.

Exercise 2.266 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.267 (Problème principal)**.** On pose $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, on obtient $\int_0^1 P = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_1 + p_0$. D'un autre côté : $\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) = (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2)p_2 + (\alpha a + \beta b + \gamma c)p_1 + (\alpha + \beta + \gamma)p_0$. Ainsi, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha+\beta+\gamma & = 1 \\ \alpha a + \beta b + \gamma c & = 1/2 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 & = 1/3 \end{array}\right.$$

On a un système de 3 équations à 3 inconnues (qui sont α, β et γ), sa résolution, si on parvient à l'existence d'une solution, prouvera l'existence d'un triplet tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$. Or ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha+ & \beta+ & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a)+ & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & \beta(b^2-a^2)+ & \gamma(c^2-a^2) & = 1/3 - a^2 \end{array}\right.$$

Puis à :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha+ & \beta+ & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a)+ & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & & \gamma(c-a)(c-b) & = 1/3 - 1/2(b+a) + ba \end{array}\right.$$

Ainsi, si a, b et c sont différents, alors on a une unique solution au système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \frac{2+6bc-3c-3b}{6(a-b)(a-c)} \\ \beta & = \frac{2+6ca-3a-3c}{6(b-c)(b-a)} \\ \gamma & = \frac{2+6ba-3a-3b}{6(c-b)(c-a)} \end{array}\right.$$

<u>N.B. :</u> Si $c = a$ (ou $b = c$ ou $a = b$), on se retrouve avec 2 équations pour 3 inconnues, donc on a une infinité de solutions, une infinité de candidats (α, β) valides pour $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b)$, dont on a l'expression explicite.

Exercise 2.268 (Question subsidiaire)**.** Le sens réciproque $\Leftarrow$ est évident.

Supposons par l'absurde que $f \times g = 0$ avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Si $g(x) \neq 0$, on a une contradiction avec $f(x) \times g(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Soit $y \in E$ tel que $g(y) \neq 0$ (idem, on a $f(y) = 0$). On regarde avec la linéarité :

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x) + f(y))(g(x) + g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction. Ainsi, on a montré que pour toutes formes linéaires f et g : $f \times g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

Retour à Khôlle 87 : Forme intégrale et morphismes d'évaluation.

2.88 Correction Khôlle 88 : Semi-inverse des applications linéaires injectives

Retour à Khôlle 88 : Semi-inverse des applications linéaires injectives.

Exercise 2.269 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.270 (Problème principal)**.** Le sens réciproque, $\Leftarrow$, est évident dans le mesure où si $x \in \text{Ker } v$ avec $u = w \circ v$, il s'ensuit que $u(x) = w(v(x)) = w(\vec{0}) = \vec{0}$, puis $x \in \text{Ker } u$: $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$.

Le sens direct est plus difficile. Soit $y \in \text{Im } v$ et $x \in E$ tel que $v(x) = y$. On veut définir $w(y) = u(x)$, mais il faut vérifier que $u(x)$ ne dépend pas du choix de x tel que $v(x) = y$. Soit alors $x, x' \in E$ tels que $v(x) = v(x') = y$, alors $v(x - x') = \vec{0}$, donc $(x - x') \in \text{Ker } v \subset \text{Ker } u$, d'où $u(x - x') = \vec{0}$ puis $u(x) = u(x')$: on peut bien définir $w(y) = u(x)$ où x est n'importe quel antécédent de y par v.

Soit maintenant F un supplémentaire de $\text{Im } v$ dans E. On pose $\forall z \in F, w(z) = \vec{0}$. Cela permet de définir w par linéarité : pour tout $x \in E$, on écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } v$ et $z \in F$ et on pose $w(x) = w(y)$ (ce qu'on a déjà définit précédemment).

Vérifions que $w \in \mathscr{L}(E)$ et que $u = w \circ v$. Soient $x_1, x_2 \in E$ et λ un scalaire. On écrit la décomposition sur $E = \text{Im } v \oplus F$: $x_1 = y_1 + z_1$ et $x_2 = y_2 + z_2$, d'où $x_1 + \lambda x_2 = (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2)$. Dès lors, $w(x_1 + \lambda x_2) = w(y_1 + \lambda y_2)$. Or, si $v(t_1) = y_1$ et $v(t_2) = y_2$, on a $v(t_1 + \lambda t_2) = x_1 + \lambda x_2$, donc $w(x_1 + \lambda x_2) = u(t_1 + \lambda t_2) = u(t_1) + \lambda u(t_2) = w(x_1) + \lambda w(x_2)$. On a montré que w est linéaire.

Ensuite, soit T un supplémentaire de $\text{Ker } v$ dans E. On écrit $x = s + t$ avec $s \in \text{Ker } v$ et $t \in T$. On a alors :

$$w(v(x)) = w(v(s) + v(t)) = w(v(t)) = u(t) = u(t) + u(s) = u(x)$$

Donc on a prouvé le sens direct, $\Rightarrow$.

Il suffit maintenant d'appliquer la propriété démontrée avec $u = Id_E$, ce qui est possible car v est injective si et seulement si $\text{Ker } v \subset \text{Ker } Id_E = \{\vec{0}\}$.

Exercise 2.271 (Question subsidiaire)**.** p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Partant de ce présupposé, on teste :

$$(Id_E - p)^2 = Id_E - 2p + p^2 = Id_E - p$$

On vient de prouver que si p est un projecteur, alors $Id_E - p$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $q = Id_E - p$ est un projecteur, alors (par ce qu'on vient de montrer) $Id_E - q$ est un projecteur. Or $Id_E - q = p$, ce qui conclut.

On remarquera d'ailleurs que comme p vaut l'identité sur son image, on a : $\text{Ker}\ (Id_E - p) = \text{Im}\ p$ et $\text{Im}\ (Id_E - p) = \text{Ker}\ p$. Ainsi, le projecteur $Id_E - p$ est le projecteur associé à p dans le sens où si p projette sur F parallèlement à G, alors $Id_E - p$ projette sur G parallèlement à F.

Retour à Khôlle 88 : Semi-inverse des applications linéaires injectives.

2.89 Correction Khôlle 89 : Stabilité et commutation

Retour à Khôlle 89 : Stabilité et commutation.

Exercise 2.272 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.273 (Problème principal)**.** Supposons que f et g commutent. Soit $x \in \text{Ker}\ g$, alors $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $f(x) \in \text{Ker}\ g$. De même, si $y \in \text{Im}\ g$, soit $x \in E$ tel que $g(x) = y$, on a $f(y) = f(g(x)) = g(f(x))$, donc $f(y) \in \text{Im}\ g$. Ker g et Im g sont stables par f.

Réciproquement, on suppose que $g^2 = g$, et que Ker g et Im g sont stabilisés par f. Comme g est un projecteur, on a $E = \text{Im}\ g \oplus \text{Ker}\ g$, donc soit $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}\ g$ et $z \in \text{Ker}\ g$. On a :

$$f(g(x)) = f(g(y) + g(z)) = f(g(y)) = f(y)$$

On a utilisé que $g(y) = y$ car g est l'identité sur son image. En outre :

$$g(f(x)) = g(f(y)) + g(f(z)) = f(y) + \vec{0}$$

On a utilisé que $f(y) \in \text{Im}\ g$, et g est l'identité sur son image, et $f(z) \in \text{Ker}\ g$.

Ainsi, on a bien $f(g(x)) = g(f(x))$, donc f et g commutent.

Exercise 2.274 (Question subsidiaire)**.** On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(f + \lambda g)(x) &= \int_0^x t(f + \lambda g)(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^x tg(t)\mathrm{d}t \\
&= (\varphi(f) + \lambda\varphi(g))(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

φ est injective : on regarde son noyau. Soit $f \in \text{Ker } \varphi$. Alors $\forall x, \varphi(f)(x) = 0$, et comme $\varphi(f)$ est dérivable, on obtient $\forall x, \varphi(f)'(x) = xf(x) = 0$, puis $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ et par continuité, f est la fonction nulle. On a montré que Ker $\varphi = \{x \mapsto 0\}$, c'est-à-dire que φ est injective.

φ n'est pas surjective car $\varphi(f)$ est toujours dérivable : on ne peut pas atteindre tous les éléments de E. On peut tenter de calculer Im φ. Soit g un fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et g' dérivable en 0, alors on peut poser $f : t \mapsto g'(t)/t$ et $f(0) = 0$. On a bien $f \in E$ grâce aux hypothèses qui assurent la continuité en 0. En outre, $\varphi(f) = \int_0^x t\frac{g'(t)}{t}\mathrm{d}t = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x)$. Réciproquement, si $g \in \text{Im } \varphi$, alors on pose f continue telle que $\varphi(f) = g$, on a alors $g(0) = \int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t = 0$, puis en dérivant $g'(x) = xf(x)$, donc $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g'(0) = 0$ et enfin $\frac{g'(x)-g(0)}{x-0} = f(x)$ converge quand $x \to 0$, donc g est deux fois dérivable en 0. Finalement (et on a bien un espace vectoriel) :

$$\text{Im } \varphi = \{g \in E; g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), g(0) = g'(0) = 0, g' \text{ dérivable en } 0\}$$

Retour à Khôlle 89 : Stabilité et commutation.

2.90 Correction Khôlle 90 : Une équation différentielle d'ordre supérieur

Retour à Khôlle 90 : Une équation différentielle d'ordre supérieur.

Exercise 2.275 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.276 (Problème principal)**.** On a Ker $U = \text{Vect}(x \mapsto e^{x^2})$, en résolvant l'équation différentielle.

Soit $f \in \text{Ker } E$. On pose g tel que $f(x) = g(x)e^{x^2}$ (on va faire une méthode de variation de la constante à l'ordre n), et on a : $U(f)(x) = g'(x)e^{x^2}$. Par récurrence immédiate : $U^n(f)(x) = g^{(n)}e^{x^2}$. On trouve ainsi que $f \in \text{Ker } U^n$ si et seulement $\forall x, g^{(n)}(x) = 0$ si et seulement si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Ainsi :

$$\text{Ker } U^n = \left\{x \mapsto P(x)e^{x^2}; P \in \mathbb{R}_n[X]\right\}$$

Exercise 2.277 (Question subsidiaire)**.** Comme $F' \subset F$, on a : $F' \cap G \subset F' \cap (G \cap F) = \{\vec{0}\}$, car F' et $G \cap F$ sont supplémentaires dans F.

En outre, soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, car $E = F + G$. Ensuite, on peut écrire $x_F = y_{F'} + y_G$ avec $y_{F'} \in F'$ et $y_G \in (G \cap F) \subset G$, car $F' \oplus (G \cap F) = F$. Ainsi : $x = y_{F'} + (y_G + x_G)$ avec $y_{F'} \in F'$ et $(y_G + x_G) \in G$. Finalement : $E = F' + G$.

On a bien montré que : $E = F' \oplus G$.

Retour à Khôlle 90 : Une équation différentielle d'ordre supérieur.

2.91 Correction Khôlle 91 : Autour des valeurs intermédiaires

Retour à Khôlle 91 : Autour des valeurs intermédiaires.

Exercise 2.278 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.279 (Problème principal)**.** Supposons que f ne soit pas continue (mais injective et ayant la propriété des valeurs intermédiaires). Soit alors a un point de discontinuité de f et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, |x-a| < \eta, |f(x)-f(a)| > \varepsilon$. On pose $y_+ = f(a)+\varepsilon/2$ et $y_- = f(a)-\varepsilon/2$. Soit b_0 tel que $|f(b_0)-f(a)| > \varepsilon$. Si $f(b_0) < f(a)-\varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_-$ grâce aux valeurs intermédiaires. Si $f(b_0) > f(a)+\varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_+$. Ensuite, on peut construire b_1 tel que $|b_1 - a| < |c_0 - a| (= \eta)$ et $|f(b_1)-f(a)| > \varepsilon$. Cela permet de construire $c_1 \in]b_1, a[$ tel que $f(c_1) \in \{y_-, y_+\}$. On a bien $c_0 \neq c_1$ (car $c_0 < b_1 < c_1$).

On poursuit ainsi pour construire des suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ tels que tous les c_n soient différents et que $\forall n, f(c_n) \in \{y_-, y_+\}$. Cela contredit le caractère injectif de f car on a trouvé plus de deux antécédents à un ensemble à deux éléments (on aurait d'ailleurs pu construire une suite de seulement 3 éléments). Ainsi, notre supposition était erronée : f est continue.

Supposons maintenant g non continue (mais ayant la propriété des valeurs intermédiaires et la fermeture des images réciproques sur $\mathbb{Q}$). Soit a un point de discontinuité de g. On peut reprendre le raisonnement précédent avec y_+ et y_- des rationnels différents de a (grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Plus précisément, on choisit une suite $(\eta_n)_n$ strictement positive qui tend vers 0, puis on construit par récurrence une suite $(c_n)_n$ qui vérifie $\forall n, g(c_n) \in \{y_-, y_+\}$ et $\eta_n > |c_n - a|$ (cela est possible car on peut toujours ajuster le choix de b_n dans le raisonnement précédent pour le rendre plus proche de a au besoin). Alors, on a $c_n \to a$ quand $n \to +\infty$, mais $\forall n, c_n \in (X_{y_-} \cup X_{y_+})$ qui est fermé, donc comme $(c_n)_n$ converge, sa limite est dans $X_{y_-} \cup X_{y_+}$, d'où $g(a) \in \{y_-, y_+\}$, ce qui n'est pas.

Finalement, g est continue.

Exercise 2.280 (Question subsidiaire)**.** On peut (presque) poser :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ce faisant, on obtient une bijection de $[0,1]$ dans lui-même (sa réciproque est elle-même), qui est discontinue sauf en $1/2$. On peut corriger cette fonction pour pleinement répondre à la question :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, x \neq 1/2 \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \tilde{f}(0) = 1/2 \ ; \ \tilde{f}(1/2) = 0 & \end{cases}$$

Cette fonction est une bijection (involution) de $[0,1]$ discontinue partout.

Retour à Khôlle 91 : Autour des valeurs intermédiaires.

2.92 Correction Khôlle 92 : Jouer avec la partie entière

Retour à Khôlle 92 : Jouer avec la partie entière.

Exercise 2.281 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.282 (Problème principal)**.** Si $x > 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, puis $f(x) = 0$: f est continue sur $]1, +\infty[$.

Pour tout k entier, la fonction est continue sur $\left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[$ car elle coïncide avec $x \mapsto kx^2$. Reste à déterminer les limites en $\frac{1}{k}^+$ et $\frac{1}{k}^-$. À droite, on a :

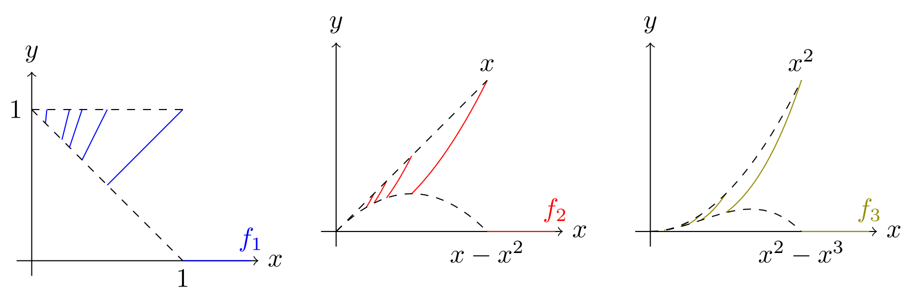
$$\lim_{\frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{k-1}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

À gauche, on a :

$$\lim_{\frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k}$$

La fonction est ainsi discontinue en tout pour $x = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$. Elle est continue en 0 car $\forall x, \frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$, donc $\forall x, 1 - x \leq f(x) \leq 1$, puis $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$.

Si on regarde la fonction $f_n : x \mapsto x^n \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, alors on a, par le même raisonnement que f_n et continue sur $]1, +\infty[$ (elle y est nulle) et coïncide avec $x \mapsto kx^n$ sur tout intervalle $\left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right[$. Elle a donc les limites $\frac{k-1}{k^n}$ par la droite, et $\frac{k}{k^n} = \frac{1}{k^{n-1}}$ par la gauche. Finalement, aucune des f_n n'est continue (chacune a pour domaine de continuité $\mathbb{R} \backslash \bigcup_k \{\frac{1}{k}\}$), mais elles se "rapprochent" d'une fonction continue.



Exercise 2.283 (Question subsidiaire)**.** Soient $A = \{x \in I; f(x) = c \text{ et } \exists y, x < y, f(y) = d\}$ et $a = \sup A$. Soit $B = \{x > a; f(x) = d\}$ et $b = \inf B$.

Soit une suite de points de A qui tend vers a, disons $(a_n)_n$, alors $\forall n, f(a_n) = c$, et par continuité de f, $f(a) = c$. De même, $f(b) = d$. En outre, $a < b$ car $b \in B \subset [a, +\infty[\cap I$.

On va prouver que $f([a, b]) = [c, d]$. Tout d'abord, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[c, d] \subset f([a, b])$ car $c \in f([a, b])$ et $d \in f([a, b])$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) < c$, alors $x > a$ et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver $y \in [x, b]$ tel que $f(y) = c$ (car $f(x) < c < f(b)$). Cependant, on a alors trouvé y tel que $f(y) = c$ et $b > y$ avec $f(b) = d$ mais aussi $y > a$, ce qui contredit la maximalité de a. Inversement, s'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > d$ et $x < b$, alors on peut trouver par le théorème des valeurs intermédiaires $y \in [a, x]$ qui contredit la minimalité de b car $f(y) = d$ mais $a < y < b$. Finalement, $f([a, b]) \subset [c, d]$ et on a montré l'égalité.

Retour à Khôlle 92 : Jouer avec la partie entière.

2.93 Correction Khôlle 93 : Fonction périodique déviée

Retour à Khôlle 93 : Fonction périodique déviée.

Exercise 2.284 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.285 (Problème principal)**.** Supposons g non constante et soit $T > 0$ une de ses périodes. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq x + NT$. Alors, pour tout n :

$$f(y+nT)+g(y+nT) \leq f(x+nT+NT)+g(x+nT+NT) = f(x+nT+NT)+g(x)$$

Le membre de gauche tend vers $g(y)$ quand $n \to +\infty$ et celui de droite vers $g(x)$, d'où : $g(y) \leq g(x)$. Par un argument symétrique, on a aussi : $g(x) \leq g(y)$. Ainsi, g est constante.

Exercise 2.286 (Question subsidiaire)**.** <u>a) Par l'absurde :</u> Supposons que ni $f > g$, si $g > f$, alors il existe x, y tels que $f(x) > g(x)$ et $f(y) < g(y)$. Mais alors la fonction $f - g$ est continue, positive et négative. Elle s'annule donc par le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists z, f(z) = g(z)$. Par symétrie d'argument, on peut supposer $f > g$. Comme $f - g$ est continue strictement positive sur un segment, on peut trouver $\alpha = \inf_{[0,1]} f - g > 0$. Dès lors : $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$. Ensuite :

$$\forall x, f(f(x)) \geq g(f(x)) + \alpha = f(g(x)) + \alpha \geq g(g(x)) + \alpha + \alpha = g^2(x) + 2\alpha$$

En itérant cet argument, on en déduit que $\forall n, x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$. Mais en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $f^n(x) \geq +\infty$, alors que $f(x) \in [0, 1]$. De cette absurdité découle l'existence d'un point commun à f et g.

<u>b) Par les points fixes :</u> X n'est pas vide car $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - x$ est continue avec $\tilde{f}(0) \geq 0$ et $\tilde{f}(1) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\tilde{f}$ s'annule, c'est-à-dire que f admet un point fixe. Comme X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné (inclus dans $[0, 1]$), il admet une borne inférieur et une borné supérieure, nommons-les x_m et x_M. Soit une suite de points de X, $(x_k)_k$ qui tend vers x_m. On a : $\forall k, f(x_k) = x_k$ car $x_k \in X$. Par continuité, l'égalité passe à la limite et on trouve que : $f(x_m) = x_m$, ce qui induit que cette borne

inférieure est atteinte, c'est un minimum. De la même manière, x_M est un maximum. En outre, g stabilise X. En effet, soit $x \in X$, alors, par commutation, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, donc $g(x)$ est un point fixe de f. De fait, $g(x_m) \in X$, et par minimalité de x_m, on obtient que $g(x_m) \geq x_m$. Pareillement, $g(x_M) \leq x_M$. Cela donne que $g - f$ est continue, d'abord positive (en x_m), puis négative. Ainsi, elle s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires, donc on peut trouver un point tel que $f(y) = g(y)$.

Retour à Khôlle 93 : Fonction périodique déviée.

2.94 Correction Khôlle 94 : Pseudo-dérivation

Retour à Khôlle 94 : Pseudo-dérivation.

Exercise 2.287 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.288 (Problème principal)**.** Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\forall 0 < |x| < \eta, \left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| \leq \varepsilon/2$. On notera que $\forall k, |x/2^k| < \eta$. Fixons x tel que $0 < |x| < \eta$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{2^k}{x} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Or on a $\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De fait, à partir d'un certain rang N, on a : $\left|\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| \leq \varepsilon/2$. Il s'ensuit que :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{2^k}{x} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right]\right| \leq \varepsilon$$

Finalement, on a bien que $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$.

Exercise 2.289 (Question subsidiaire)**.** Soit $y \in f(A)$ et $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme B est dense dans A, on peut trouver une suite $(x_n)n \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$. Comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$, donc on a construit une suite d'éléments de $f(B)$ qui tend vers $f(x) \in A$. Ainsi, $f(B)$ est dense dans $f(A)$.

Le groupe $\mathbb{Z}[2\pi]$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $2\pi \notin \mathbb{Q}$ (exercice classique sur les groupes), donc, comme cos est une fonction continue, on a que $\cos(\mathbb{Z}[2\pi]) = \{\cos(n + 2k\pi); n, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ (on a utilisé la parité de cos et sa 2π-périodicité) est dense dans $\cos(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.

Retour à Khôlle 94 : Pseudo-dérivation.

2.95 Correction Khôlle 95 : Indicatrice des nombres premiers

Retour à Khôlle 95 : Indicatrice des nombres premiers.

Exercise 2.290 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.291 (Problème principal)**.** Soit $x > 1$, alors on peut distinguer deux cas. Si $x \notin \mathbb{Q}$, on obtient que $\forall n, xn \notin \mathcal{P} \subset \mathbb{Z}$, d'où $f(xn) = 0$ et $f(nx) \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \wedge q = 1$, il s'ensuit que $p > q \geq 1$, et nx est entier si et seulement si $q|n$, mais dans ce cas, $p|nx$ et nx n'est premier que dans le cas où $p \in \mathcal{P}$ et $n = q$. Ainsi, quand $n \to +\infty$, $f(nx) \to 0$ (avec égalité pour $n > q$, voire avant).

f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, si elle en avait une, ce serait 0 d'après le raisonnement précédent, cependant, on notant $(p_n)_n$ la suite des nombres premiers, on a $f(p_n) = 1 \to 1$, ce qui contredit l'hypothétique $f(x) \to 0$ (on s'appuie ici sur l'infinité des nombres premiers, c'est-à-dire $p_n \to +\infty$).

Exercise 2.292 (Question subsidiaire)**.** Supposons que f n'est pas continue. Soit alors a un point de discontinuité de f. Comme f est croissante, $f(a)$ majore f sur $]0, a[$, donc, par le théorème de la limite monotone, f admet une limite en a^-. Cette limite ℓ est strictement inférieure à $f(a)$ sinon f serait continue en a. Mais par ce même théorème appliqué à $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a une limite pour g en a^- qui est strictement supérieure à $g(a) = \frac{f(a)}{a}$. Seulement, cette limite vaut $\frac{\ell}{a} < \frac{f(a)}{a}$...

Finalement, f ne peut être discontinue en aucun point : f est continue.

Retour à Khôlle 95 : Indicatrice des nombres premiers.

2.96 Correction Khôlle 96 : Continuité d'une fonction limite

Retour à Khôlle 96 : Continuité d'une fonction limite.

Exercise 2.293 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.294 (Problème principal)**.** On trouve $f(x) = 1$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = -1$ pour $|x| < 1$, donc les points de discontinuité sont $\{-1, +1\}$.

Exercise 2.295 (Question subsidiaire)**.** Soit X l'ensemble des points fixe de f. X est non vide car $x \mapsto f(x) - x$ est continue, positive en 0 et négative en 1 donc s'annule et ce point d'annulation est un point fixe de f. X admet donc une borne inférieure (X est bornée car inclus dans $[0, 1]$), m.

On a : $m \in X$ car on peut trouver une suite d'éléments, $(x_n)_n$ de X qui tend vers m quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\forall n, f(x_n) = x_n$, et par continuité de f, l'égalité passe à la limite en $f(m) = m$. g stabilise X car g commute avec f. En effet, si $x \in X$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ d'où $g(x) \in X$. Dès lors, $g(m) \geq m$ sinon on contredirait la minimalité de m.

On peut construire la suite $(g^n(m))_n$ (où g^n désigne $g \circ g \circ ... \circ g$, n fois). Cette suite est croissante par récurrence immédiate, car g est croissante : $g^{n+1}(m) \geq$

$g^n(m)$ est vrai pour $n = 0$ et si cela est vrai pour un n fixé, alors on peut appliquer la fonction croissante g des deux côtés pour obtenir $g^{n+2}(m) \geq g^{n+1}(m)$. Cette suite est majorée car c'est une suite dans $[0,1]$: elle admet une limite ℓ.

On va montrer que $f(\ell) = g(\ell) = \ell$: c'est le point fixe commun recherché. D'une part, la suite $(g^n(m))_n$ est dans X par récurrence car g stabilise X. Il s'ensuit que sa limite est aussi dans X car f est continue (on a déjà vu cet argument pour prouver que $m \in X$) : $f(\ell) = \ell$. D'autre part, ℓ est le limite de $g^n(m)$ quand $n \to +\infty$, de fait, en passant à la limite dans $g^{n+1}(m) = g(g^n(m))$, par continuité de g, on a $g(\ell) = \ell$.

Retour à Khôlle 96 : Continuité d'une fonction limite.

2.97 Correction Khôlle 97 : Stabilisation polynomiale du cercle

Retour à Khôlle 97 : Stabilisation polynomiale du cercle.

Exercise 2.296 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.297 (Problème principal)**.** Les polynômes de la forme $P = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ sont des solutions évidentes au problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. $\mathcal{S}$ est stable par composition car c'est un sous-ensemble des applications de $\mathbb{U}$ sur lui-même. Il est aussi stable par multiplication des polynômes.

Si on suppose que tous les éléments de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors on peut raisonner par récurrence. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré non nul, alors P s'annule en 0 par hypothèse. Soit Q tel que $P = XQ$. Soit $\lambda \in \mathbb{U}$, alors $Q(\lambda) = {}^{P(\lambda)}/_{\lambda} \in \mathbb{U}$, donc $Q \in \mathcal{S}$ avec $\deg Q = \deg P - 1$. Il suffit maintenant de trouver les polynômes constants de $\mathcal{S}$. Il est évident que si $P \in \mathcal{S}$ est constant, alors cette constante est un λ de $\mathbb{U}$. Ainsi, si tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors :

$$\mathcal{S} = \{\lambda X^n ; \lambda \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons maintenant que tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré n. On pose $Q = X^n P(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$. Contrairement à ce qu'il semble, Q est un polynôme (le X^n contrebalance le $\overline{P}(\frac{1}{X})$). Or si $z \in \mathbb{U}$, on a : $\overline{P}(\frac{1}{z}) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, donc $P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = P(z)\overline{P(z)} = |P(z)|^2 = 1$ car $P(z) \in \mathbb{U}$. Finalement, $Q(z) = z^n \times 1$, et Q coïncide avec X^n sur $\mathbb{U}$. De fait (comme $\mathbb{U}$ est infini), $Q = X^n$ sur $\mathbb{C}$, et on a $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$. On va utiliser cette égalité sur $\mathbb{R}$. Comme P est continue et diverge en $+\infty$, en faisant tendre $z \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), on obtient que $P(0) = 0$ (sans quoi on aurait $\pm\infty \times P(0) = 1$). On a bien montré ce qu'on voulait.

Si $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, on a en particulier l'inclusion, donc $P \in \mathcal{S}$. Or toutes les fonctions **non constantes** de $\mathcal{S}$ sont bijectives sur $\mathbb{U}$, donc :

$$P(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{U}, \underline{n \in \mathbb{N}^*}, P = \lambda X^n$$

Exercise 2.298 (Question subsidiaire)**.** Premièrement, on a, pour $n = 0$: $B_p(0+1) - B_p(0) = \sum_{k=0}^{0} k^{p-1} = 0$. D'où $B_p(0) = B_p(1)$.

Ensuite, comme les polynômes $B_p(X+1) - B_p(X)$ et pX^{p-1} coïncident sur un ensemble infini, $\mathbb{N}$, ils sont égaux, et on a en particulier :

$$B_p(n+1) - B_p(-n) = \sum_{k=-n}^{n} B_p(k+1) - B_p(k) = \sum_{k=-n}^{n} pk^{p-1}$$

Si p est pair, alors $p-1$ est impair et la somme de droite et nulle, donc : $\forall n, B_p(n+1) = B_p(-n)$.

Si p est impair, $p-1$ est pair, et on a : $p\sum_{k=-n}^{n} k^{p-1} = 2p\sum_{k=-n}^{0} k^{p-1} = 2(B_p(0) - B_p(-n))$.

Finalement, **si** $B_{2p+1}(0) = 0$**, alors** $B_p(n+1) = (-1)^p B_p(-n)$, et on a l'égalité des polynômes $B_p(1-X)$ et $(-1)^p B_p(X)$ sur un ensemble infini. ce qui induit :

$$\forall x, B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$$

N.B. : On notera qu'alors : $B_{2p+1}(1/2) = 0$.

Retour à Khôlle 97 : Stabilisation polynomiale du cercle.

2.98 Correction Khôlle 98 : Système complexe et fonctions élémentaires

Retour à Khôlle 98 : Système complexe et fonctions élémentaires.

Exercise 2.299 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.300 (Problème principal)**.** On va résoudre le système plus général :

$$\begin{cases} x+y+z = a \\ xyz = b \\ |x| = |y| = |z| \end{cases}$$

Avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Commençons par remarquer que la deuxième ligne donne $|xyz| = |b|$, d'après la troisième ligne, on obtient $|x|^3 = |b|$. On note $d = \sqrt[3]{|b|}$ pour plus de commodité, et on a : $|x| = |y| = |z| = d$. On cherche à exprimer $xy + yz + zx$ afin d'avoir toutes les fonctions symétriques élémentaires et de pouvoir dire de quel polynôme (de degré 3) x, y et z sont les racines.

On a : $xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. On peut noter $x = d\lambda$, $y = d\mu$ et $z = d\nu$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{U}$. On obtient :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d}\left(\overline{\lambda} + \overline{\mu} + \overline{\nu}\right) = \frac{1}{d^2}(\overline{x+y+z}) = \frac{\overline{a}}{d^2}$$

Finalement, on trouve : $xy + yz + zx = \frac{\overline{a}b}{d^2}$, et x, y et z sont les 3 racines de $X^3 - aX^2 + \frac{\overline{a}b}{d^2}X - b$. Il est possible de résoudre cette équation en toute généralité, cependant, on se limitera à $a = b = 1$. Dans ce cas, on cherche les racines de : $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

1 est racine évidente de P. On en déduit la factorisation : $P = (X-1)(X^2+1)$. Finalement : $\{x, y, z\} = \{1, i, -i\}$ (on prendra le temps de vérifier que cette solution fonctionne).

Exercise 2.301 (Question subsidiaire)**.** On pose $b_0 = 1$.

Supposons construits $b_0, ..., b_n$ tels que $\forall p \leq n, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$. Le degré de B_{n+1} est $\deg B_n + 1$ car $B'_{n+1} = (n+1)B_n$, on note donc $a_0, ..., a_{n+1}$ ses coefficients : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$. Grâce à la formule de récurrence, on obtient ($\neq 0$) :

$$a_k = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} b_{n-(k-1)} = \binom{n+1}{k} b_{n+1-k}$$

Ainsi : $B_{n+1} = b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k$. Avec l'égalité intégrale, on trouve :

$$(n+1)b_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k$$

De fait, si une suite $(b_n)_n$ vérifie $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$, alors elle vérifie $b_0 = 1$ et la récurrence ci-dessus.

Réciproquement, si la suite $(b_n)_n$ vérifie $b_0 = 1$ et la récurrence ci-dessus, alors on a bien $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$.

Retour à Khôlle 98 : Système complexe et fonctions élémentaires.

2.99 Correction Khôlle 99 : Lemme de Thom

Retour à Khôlle 99 : Lemme de Thom.

Exercise 2.302 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.303 (Problème principal)**.** On peut raisonner par récurrence sur le degré maximal des polynômes dans $\mathcal{F}$. Supposons que $E_{\mathcal{F}}$ est in intervalle pour toute famille $\mathcal{F}$ telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n$ (n fixé).

Soit $\mathcal{F}$ une famille telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n+1$. On pose $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ la sous-famille des polynômes de degré exactement $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ est un intervalle. Soient $x, y \in E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ ($x \neq y$). Soit $z \in]x, y[$ et $P \in \mathcal{G}$. Si $P(z)$ n'est pas du signe de ε_P (qui est le signe de $P(x)$ et de $P(y)$), alors P n'est pas monotone sur $[x, y]$: **faire un dessin**. Dès lors, en dérivant, P' n'est pas de signe constant sur $[x, y]$. Cependant, $P' \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{G}$ car la famille est stable par dérivation, mais comme $[x, y] \subset E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ qui est un intervalle, P' ne change pas de signe sur $[x, y]$. Cette contradiction montre que $E_P \cap E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ est un intervalle, et on a :

$$E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P \in \mathcal{G}} E_{\{P\}\cup(\mathcal{F}\backslash\mathcal{G})} = \bigcap_{P \in \mathcal{G}} \left(E_P \cap E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}\right)$$

Finalement, $E_{\mathcal{F}}$ est bien un intervalle.

Par récurrence, pour toute famille $\mathcal{F}$ (même infinie) de polynômes, et tout ensemble de signes $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}}$, l'ensemble $E_{\mathcal{F}}$ est un intervalle.

Exercise 2.304 (Question subsidiaire)**.** En évaluant en $n = 0$, on obtient que $B_p(1) = B_p(0)$.

b_p est le coefficient constant de B_p, or en évaluant B_p en 1, 2,..., $N + 1$, on obtient un système de $N + 1$ équations à coefficients rationnels, dont les inconnues sont les coefficients de B_p. En prenant $N = \deg B_p$, puis en inversant le système, on trouve bien que tous les coefficients de B_p sont rationnels, en et particulier $b_p \in \mathbb{Q}$.

Retour à Khôlle 99 : Lemme de Thom.

2.100 Correction Khôlle 100 : Croisements de Ghys

Retour à Khôlle 100 : Croisements de Ghys.

Exercise 2.305 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.306 (Problème principal)**.** On trouvera la solution ici.

Exercise 2.307 (Question subsidiaire)**.** On remarque que $B_p(n+1) - B_p(n) = pn^{n-1}$ pour tout n, donc l'égalité est vraie pour tout x : $B_p(x+1) - B_p(x) = px^{p-1}$. En dérivant, on obtient que :

$$B_p'(x+1) - B_p'(x) = p(p-1)x^{p-2} = p(B_{p-1}(x+1) - B_{p-1}(x))$$

Donc, en effectuant une somme télescopique, on obtient que, pour tout n :

$$B_p'(n+1) - B_p'(0) = p(B_{p-1}(n+1) - B_{p-1}(0))$$

Ce qui donne bien l'égalité des polynômes $B_p = pB_{p-1}$ car on a l'égalité sur un ensemble infini.

Ensuite, $\int_0^1 B_p'(t)\mathrm{d}t = B_p(0+1) - B_p(0) = p \times 0^{p-1} = 0$, donc : $\int_0^1 B_p = 0$.

Enfin, on peut déterminer B_7 par récurrence car on a le coefficient sur X^k dans B_p qui vaut $^p/_k$ fois le coefficient de X^{k-1} dans B_{p-1} et l'intégrale qui vaut 0 (donc si $B_p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$, alors $\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{k+1}$) :

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
B_1 &= X - 1/2\\
B_2 &= X^2 - X + 1/6\\
B_3 &= X^3 - 3/2X^2 + 1/2X\\
B_4 &= X^4 - 2X^3 + X^2 - 1/30\\
B_5 &= X^5 - 5/2X^4 + 5/3X^3 - 1/6X\\
B_6 &= X^6 - 3X^5 + 5/2X^4 - 1/2X^2 + 1/42\\
B_7 &= X^7 - 7/2X^6 + 7/2X^5 - 7/6X^3 + 1/6X
\end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que (on peut développer toutes les parenthèse via le binôme de Newton, mais ce n'est pas nécessaire) :

$$\sum_{k=0}^{n} k^6 = \frac{1}{8}(n+1)^7 - \frac{7}{16}(n+1)^6 + \frac{7}{16}(n+1)^5 - \frac{7}{48}(n+1)^3 + \frac{1}{48}(n+1) \sim \frac{n^7}{8}$$

Retour à Khôlle 100 : Croisements de Ghys.

2.101 Correction Khôlle 101 : Inversion de matrice par des polynômes

Retour à Khôlle 101 : Inversion de matrice par des polynômes.

Exercise 2.308 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.309 (Problème principal)**.** Supposons le membre de gauche vérifié, alors :

$$f(X) = \sum_i \sum_j \binom{j}{i} h_j X^i = \sum_j h_j \sum_i \binom{j}{i} X^i = \sum_j h_j (X+1)^j = h(X+1)$$

Réciproquement, si $f(X) = h(X+1)$, alors on a $f(X) = \sum_i \left(\sum_j \binom{j}{i} h_j \right) X^i$, donc en identifiant les coefficients, on retrouve l'égalité souhaitée.

Si on a l'égalité de gauche, alors on a $f(X) = h(X+1)$, donc $h(X) = f(X-1)$, puis en développant :

$$h(X) = \sum_i f_i (X-1)^i = \sum_i \sum_j (-1)^j \binom{i}{j} f_i (-X)^j = \sum_j \left(\sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i \right) X^j$$

En identifiant les coefficients, on trouve que $\forall i, h_i = \sum_i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i$.

Exercise 2.310 (Question subsidiaire)**.** Vérifions l'égalité pour $x, y \in \mathbb{N}^2$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^2$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
B_p(n+m) &= p \sum_{k=0}^{n+m} k^{p-1} + B_p(0) \\
\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(n) m^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(k \sum_{j=0}^{n} j^{k-1} + B_k(0) \right) m^{p-k} \\
&= m^p + \sum_{j=0}^{n} p \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1} j^{k-1} m^{p-k} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) m^{p-k} \\
&= p \sum_{j=0}^{n} (j+m)^{p-1} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) m^{p-k} \\
&= B_p(n+m) - B_p(m) + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) m^{p-k}
\end{aligned}
$$

On doit donc montrer la relation pour $n = 0$ (et elle induit la relation pour tous $n \in \mathbb{N}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{C}$ car on a l'égalité de deux polynômes sur un ensemble infini) et on aurait terminé. Prouvons cela par récurrence sur m. Cela est vrai pour $m = 0$. Ensuite, posons $Q(m) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) m^{p-k}$:

$$
\begin{aligned}
Q(m+1) - Q(m) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) \left((m+1)^{p-k} - m^{p-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(0) \sum_{j=0}^{p-k-1} \binom{p-k}{j} m^j \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} m^j \sum_{k=0}^{p-j-1} \binom{p}{k} \binom{p-k}{j} B_k(0) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} m^j \sum_{k=0}^{p-j-1} \binom{p-j}{k} B_k(0) \\
&= \binom{p}{p-1} m^{p-1} = p m^{p-1} \\
&= B_p(m+1) - B_p(m)
\end{aligned}
$$

On a utilisé la connaissance donné par l'énoncé pour les valeurs en 0. Ainsi, par récurrence, on a bien l'égalité des polynômes Q et B_p. Ainsi, on a l'égalité montré que $\forall n, m, B_p(n+m) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(n) m^{p-k}$. Comme on a l'égalité sur un nombre infini de valeurs, les polynômes $B_p(X+m)$ et $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(X) m^{p-k}$ sont égaux (quel que soit m entier). Donc les polynômes $B_p(x+Y)$ et $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(n) Y^{p-k}$ sont égaux (quel que soit $x \in \mathbb{C}$). Finalement, on a bien montré l'égalité :

$$
\forall x, y \in \mathbb{C}^2, B_p(x+y) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B_k(x) y^{p-k}
$$

Retour à Khôlle 101 : Inversion de matrice par des polynômes.

2.102 Correction Khôlle 102 : Polynômes de Laguerre

Retour à Khôlle 102 : Polynômes de Laguerre.

Exercise 2.311 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.312 (Problème principal)**.** Posons $a_k^{(n)} = \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}$ et montrons que les coefficients de $XL_n' + nL_n$ et $-nL_{n-1}$ sont les mêmes. On a :

$$\begin{aligned} ka_k^{(n)} + na_k^{(n)} &= \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(k-n) \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n-1}{k} \times \frac{n}{n-k} \times (k-n) \\ &= a_k^{(n-1)} \end{aligned}$$

Donc on a bien : $L_n = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} X^k$.
Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} nL_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}nX^k \\ (1-X)L_n' &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{k!}X^k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}X^k \\ XL_n'' &= \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{(k-1)!}X^k \end{aligned}$$

Puis, en sommant, on obtient le coefficient sur X^k :

$$\left\{\begin{array}{lll} k \notin \{0,n\}, & \binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{k!}(k+1) + \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k) & = 0 \\ k = 0, & \binom{n}{0}\frac{(-1)^0}{0!}n - \binom{n}{1}\frac{(-1)^0}{0!} & = 0 \\ k = n, & \binom{n}{n}\frac{(-1)^n}{n!}n - \binom{n}{n}\frac{(-1)^n}{(n-1)!} & = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, L_n vérifie bien l'équation (E_n). Le degré de L_n est donc n, son coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$ et son terme constant 1.

Exercise 2.313 (Question subsidiaire)**.** On note que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$. De fait, si y est solution de (E_n), alors :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -e^{-x}(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xe^{-x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = +e^{-x}ny$$

Réciproquement, si y vérifie l'égalité, alors en divisant par $e^{-x} \neq 0$, on trouve que y est solution de (E_n).

Ensuite, si on applique la formule de Leibniz, on obtient :

$$\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right) = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k\left(e^{-x}\right)}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}\left(x^n\right)}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n!}{k!}x^k = L_n(x)$$

Retour à Khôlle 102 : Polynômes de Laguerre.

2.103 Correction Khôlle 103 : Étude de fonction

Retour à Khôlle 103 : Étude de fonction.

Exercise 2.314 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.315 (Problème principal)**.** f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash[0,1]$. Elle est aussi définie et continue en 0 et de limite $+\infty$ en 1^+.

Calculons le taux de variation en 0^- :

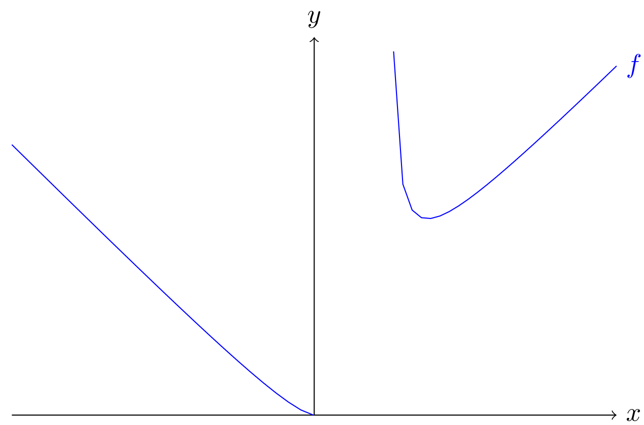
$$\tau_{0^-}(h) = \frac{f(-h)-f(0)}{-h-0} = \frac{1}{-h}\left(\sqrt{\frac{(-h)^3}{-h-1}}-0\right) = -\sqrt{\frac{h}{h+1}} \longrightarrow 0$$

f est bien dérivable sur son ensemble de définition. On peut calculer sa dérivée, le plus simple est de la calculer en logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}$$

Comme $f(x)$ est toujours positif, on obtient le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Exercise 2.316 (Question subsidiaire)**.** Δ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ par produit. On a :

$$\begin{aligned}\Delta(x) =& -f'(x)(g(b)-g(x)) - g'(x)(f(a)-f(x))\\ &+ g'(x)(f(b)-f(x)) + f'(x)(g(a)-g(x))\\ =& f'(x)(g(a)-g(b)) + g'(x)(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

On a aussi $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle pour obtenir :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des accroissements finis. Ce théorème en est une généralisation.

Retour à Khôlle 103 : Étude de fonction.

2.104 Correction Khôlle 104 : Formule de Leibnitz et dénombrement

Retour à Khôlle 104 : Formule de Leibnitz et dénombrement.

Exercise 2.317 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.318 (Problème principal)**.** On applique la formule dérivation de Leibnitz :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{n!}{(n-k+j)!} x^{n-k+j} \right) \left((-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} (1-x)^{n-j} \right)$$

On peut l'utiliser pour $k = n$, et on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{n!}{j!} \frac{n!}{(n-j)!} x^j (1-x)^{n-j} \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 x^j (1-x)^{n-j} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut regarder le développement en somme de $x^n(1-x)^n$, qui est un polynôme. On constate qu'il n'y a qu'un seul terme d'ordre $2n$, le terme dominant, et son coefficient est $(-1)^n$. De fait, dans $f^{(n)}$, le terme d'ordre n est obtenu en dérivant n fois le terme d'ordre $2n$ de f, son coefficient est donc $(-1)^n \times \frac{(2n)!}{(2n-n)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. D'autre part, dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, le terme d'ordre n vaut : $n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 \times (-1)^{n-j}$.

Il s'ensuit l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercise 2.319 (Question subsidiaire)**.** Si $u_1 < u_0$, alors, du fait de la croissance de f, on démontre par récurrence que $(u_n)_n$ est décroissante positive donc convergente, disons vers ℓ ; et par continuité de f, on a $f(\ell) = \ell$.

Si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_n$ est croissante. On va montrer qu'elle est convergente car majorée. Supposons qu'elle ne soit pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. Mais alors, à partir d'un certain rang, $\frac{f(u_n)}{u_n} \leq k + \varepsilon$ avec $k + \varepsilon < 1$. Mais dans ce cas, $u_{n+1} < (k+\varepsilon)u_n < u_n$, ce qui contredit la croissance. Finalement, $(u_n)_n$ est bornée et donc convergente (vers un point fixe de f).

Dans tous les cas, $(u_n)_n$ converge. On vient au passage de montrer que f a un point fixe.

Retour à Khôlle 104 : Formule de Leibnitz et dénombrement.

2.105 Correction Khôlle 105 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur

Retour à Khôlle 105 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur.

Exercise 2.320 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.321 (Problème principal)**.** Si $a \in \{x_k\}_k$, c'est évident car on a 0 des deux côtés.

On pose $A = \frac{f(a)}{\prod_k (a - x_k)}$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - A \prod_k (x - x_k)$. La fonction φ est n fois dérivable et s'annule en $n + 1$ points distincts. Par le théorème de Rolle (appliqué sur les n différents intervalles), φ' est dérivable $n - 1$ fois et s'annule n fois. De le même manière φ'' est dérivable $n - 2$ fois et s'annule $n - 1$ fois. En poursuivant, on montre par récursion que $\varphi^{(n)}$ au moins un zéro, disons $\lambda \in]x_1, x_n[$. On a alors :

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = f^{(n)}(\lambda) - n!A = f^{(n)}(\lambda) - n! \frac{f(a)}{\prod_{k=1}^{n} (a - x_k)} = 0$$

Puis :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (a - x_k)$$

Exercise 2.322 (Question subsidiaire)**.** f' étant continue, elle est bornée sur $[a, b]$, on peut donc poser $M = \sup_x f'(x)$. On construit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et en b : $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Enfin, soit $h = f - g$. On remarque que $h(a) = h(b) = 0$. En outre, h est continue et dérivable sur $[a, b]$ avec $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Supposons que $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors $h'(x) = f'(x) - M \leq 0$: h est décroissante. Sauf que $h(a) = h(b) = 0$. De fait, h est constante et même nulle. Finalement, $f = g$, f est affine.

Retour à Khôlle 105 : Égalité des accroissements finis d'ordre supérieur.

2.106 Correction Khôlle 106 : Théorème de Darboux

Retour à Khôlle 106 : Théorème de Darboux.

Exercise 2.323 (Question de cours)**. Cf cours !**

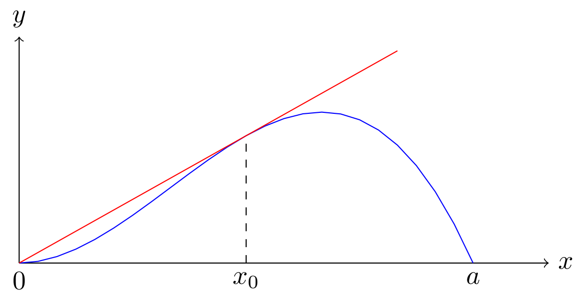
Exercise 2.324 (Problème principal)**.** Soit $x, y \in I$ (l'intervalle de définition de f) et $\lambda \in [f'(x), f'(y)]$ (on suppose $f'(x) < f'(y)$, l'inverse fonctionne aussi). On pose $g_\lambda : x \mapsto f(x) - \lambda x$. g_λ est dérivable (comme somme), et on a $g'_\lambda = f' - \lambda$. Donc $g'_\lambda(x) < 0$ et $g'_\lambda(y) > 0$. De fait, g_λ ne peut être injective car une fonction injective est strictement monotone (donc g'_λ aurait un signe fixe). Dès lors, il existe deux abscisses α, β telles que $g_\lambda(\alpha) = g_\lambda(\beta)$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et on obtient que g'_λ s'annule, disons en γ. Alors : $f'(\gamma) = \lambda$. Ainsi, on a montré que $E = \{f'(x); x \in I\}$ est un intervalle car E respecte la propriété suivante : $\forall a, b \in E, \forall c \in [a, b], c \in E$.

On peut appliquer directement la même méthode pour résoudre l'exercice. On veut montrer que f ne peut pas être injective. Si c'est le cas, on pourra appliquer le théorème de Rolle et montrer que f s'annule. On va raisonner par l'absurde et supposer que f est injective. Or si f est injective, comme elle est dérivable, sa dérivée est de signe constant, disons positif c'est-à-dire f croissante. Alors, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$ d'après l'énoncé, donc $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. Or, comme f est croissante, on a en plus $f(a) \leq f(b)$, d'où $0 \leq f(a) \leq f(b) \leq 0$, et les inégalités sont des égalités : $f(a) = f(b) = 0$, et on a une contradiction car on a supposé f injective. Finalement, f ne peut être injective, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et trouver un point d'annulation pour f'.

Exercise 2.325 (Question subsidiaire)**.** On pose φ la fonction définie par $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sinon. Elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = 0$. Or : $\varphi'(c) = \frac{f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a))}{(c-a)^2}$. D'où :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

L'existence de c signifie que la tangente en c à la courbe représentative de f est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$. En fait, ces deux droites sont confondues et cet exercice est équivalent à l'exercice Exercise 1.327.



Retour à Khôlle 106 : Théorème de Darboux.

2.107 Correction Khôlle 107 : Recoupage tangentiel

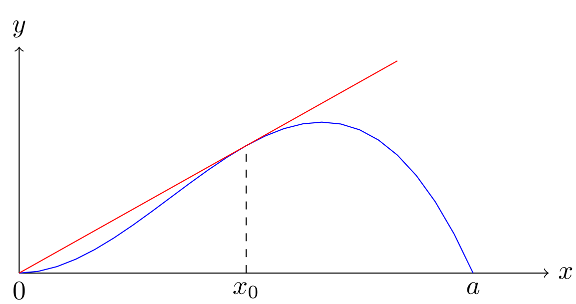
Retour à Khôlle 107 : Recoupage tangentiel.

Exercise 2.326 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.327 (Problème principal)**.** On prendra $a > 0$ pour raisonner et faire des dessins (si $a < 0$, on peut regarder $x \mapsto f(-x)$).

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe de f est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Elle passe ainsi en $(0, 0)$ si et seulement si $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$. **Faire un dessin !** On pose la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. D'après les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, g est continue en 0.

Ainsi, g est continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$ avec $g(0) = 0 = g(a)$. On applique le théorème de Rolle pour trouver x_0 en lequel $g'(x_0) = 0$. Comme $x_0 \neq 0$, une simple dérivation donne l'égalité recherchée : $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.



Exercise 2.328 (Question subsidiaire)**.** On remarque premièrement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}+3\right) = f(f \circ f(x))) = f \circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2}+3$$

On peut dériver cette égalité pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2}+3\right) = f'(x)$. Soit maintenant $(u_n^{(x)})_n$ la suite définie par $u_0^{(x)} = x$ et $u_{n+1}^{(x)} = \frac{1}{2}u_n^{(x)} + 3$. La suite est arithmético-géométrique et converge vers $6 \left(= \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-1/2}\right)$.

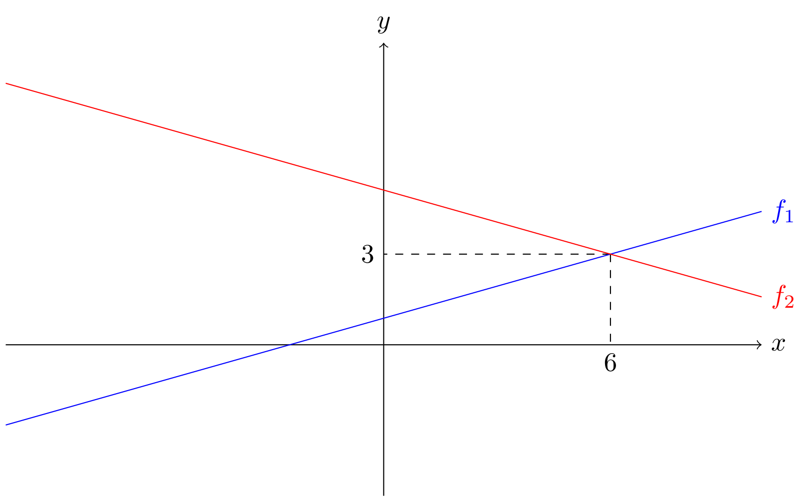
Finalement, par continuité de f', on a : $f'(u_n^{(x)}) \to f'(6)$ quand $n \to +\infty$. Mais on sait que $\left(f(u_n^{(x)})\right)_n$ est une suite constante, donc on en déduit $f'(x) = f'(u_0^{(x)}) = f'(6)$. Ainsi, on a montré que f' est constante ! f est donc une fonction affine : $f(x) = \alpha x + \beta$.

Réciproquement, si $f(x) = \alpha x + \beta$, alors f est solution au problème à condition que :

$$\forall x, \quad \left(\alpha^2 - 1/2\right)x + \alpha\beta + \beta - 3 = 0$$

Cela nous donne les deux seules solutions au problème :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2})$$
$$f_2 : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2})$$



Retour à Khôlle 107 : Recoupage tangentiel.

2.108 Correction Khôlle 108 : Fonction de Lambert

Retour à Khôlle 108 : Fonction de Lambert.

Exercise 2.329 (Question de cours)**. Cf cours !**

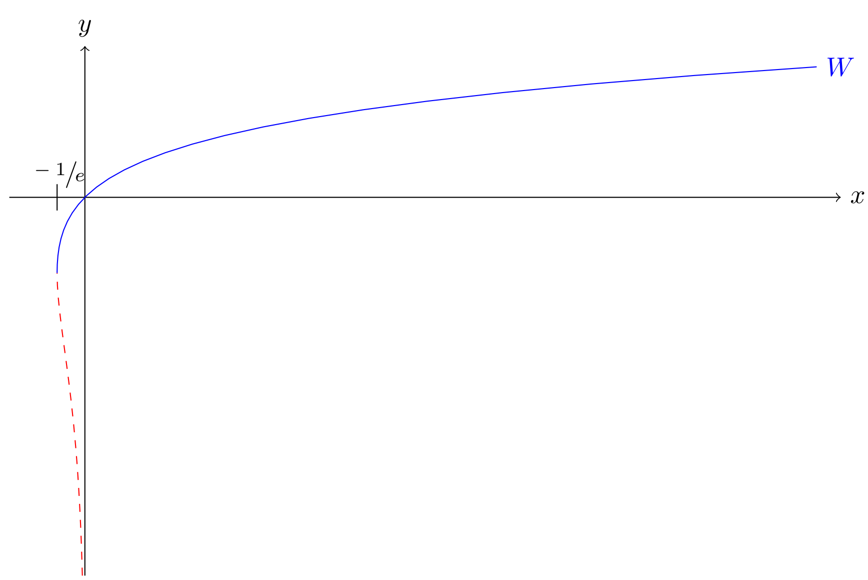
Exercise 2.330 (Problème principal)**.** On pose la fonction $f : x \mapsto xe^x$. W en est la réciproque sur $[-1/e, +\infty[$, à valeur dans $[-1, +\infty[$. En particulier, on a la dérivabilité de W comme réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée vaut $f'(x) = (1+x)e^x \neq 0$ pour $x \geq -1/e$. Ainsi, on a :

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} = \frac{1}{x+e^{W(x)}}$$

Or on a $W(0) = 0$ car 0 est l'unique solution de $0 = we^w$ d'inconnue w. Donc $W'(0) = 1$, et $W(w) \sim_0 x$. Pour aller plus loin, on peut remarquer que, pour $x \neq 0$, $W(x) \neq 0$ (déjà parce que W est croissante comme réciproque d'une fonction croissante, et aussi parce que W est injective et qu'on a déjà trouvé la pré-image de 0), donc on peut écrire que $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ pour $x \neq 0$, ce qui induit :

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

Cela donne l'équation différentielle dont W est solution : $x(1+y)y' = y$. Il est maintenant bien plus facile d'extraire les coefficients du développement de Taylor de W.



Exercise 2.331 (Question subsidiaire)**.** Soit $g : x \mapsto e^x f(x)$. g est dérivable et $g'(x) = (f'(x) + f(x))e^x = o(e^x)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \geq A, \quad -\varepsilon e^x \leq g'(x) \leq \varepsilon e^x$$

Alors en intégrant sur $[A, x]$: $\varepsilon(e^x - e^A) \leq g(x) - g(A) \leq \varepsilon(e^x - e^A)$.

Finalement : $g(A)e^{-x} - \varepsilon(1 - e^{A-x}) \leq g(x)e^{-x} \leq g(A)e^{-x} + \varepsilon(1 - e^{A-x})$.

Les deux termes d'encadrement tendent vers ε lorsque $x \to +\infty$, donc à partir d'un certain rang B :

$$\forall x \geq B, \quad -2\varepsilon \leq f(x) = g(x)e^{-x} \leq +2\varepsilon$$

Ainsi, $f(x) \to 0$ et par suite $f'(x) = (f(x) + f'(x)) - f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Retour à Khôlle 108 : Fonction de Lambert.

2.109 Correction Khôlle 109 : Principe des trapèzes

Retour à Khôlle 109 : Principe des trapèzes.

Exercise 2.332 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.333 (Problème principal)**.** Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $F' = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$. Soit $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}')$ le complémentaire de F' dans F. On a $H + F' = F$ (mais nécessairement $H \oplus F' = F$). On regarde les dimensions :

$$\begin{aligned}
&\dim F = s \\
&\dim F' = s' \\
&\dim H \leq n - r \\
&\dim H + \dim F' \geq \dim F
\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du fait qu'on a une famille génératrice de H de taille $n - r$ (la famille $\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}'$).

La dernière inégalité vient de $H + F' = F$ avec la formule de Grassmann : $\dim H + s' - \dim(H \cap F') = s$.

On en conclut que $s - s' \leq \dim H \leq n - r$, d'où $s' \geq s + r - n$.

Exercise 2.334 (Question subsidiaire)**.** Posons $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ avec A tel que $g(a) = g(b)$, ce qui est possible en posant $A = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right)\right)$.

g est $\mathcal{C}^1$ et deux fois dérivable, avec :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2$$

$$g''(x) = \frac{x-a}{2}\left(-12A - f^{(3)}(x)\right)$$

On constate que $g'(a) = 0$, et en outre, comme $g(a) = g(b)$, que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe, par le théorème de Rolle $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) = 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Rolle sur $[d, a]$ pour g', et on il existe $c \in]d, a[$ tel que $g''(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$$

En écrivant explicitement $g(b) = 0$, on trouve l'égalité souhaitée.

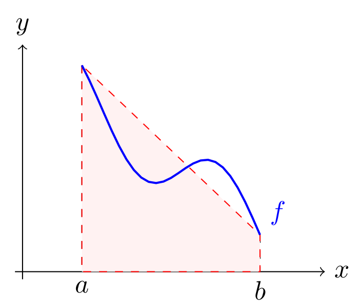
Si on prend F une primitive de f, alors cette égalité donne :

$$\exists c \in]a, b[, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3$$

Cela signifie que l'aire du domaine entre $x = a$, $x = b$ et $y = 0$, $y = f(x)$ (c'est-à-dire $A_1 = \int_a^b f$) est "bien approchée" par l'aire A_2 du trapèze défini par les 4 points $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et $(b, 0)$, au sens où :

$$|A_1 - A_2| \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|\right) \frac{(b-a)^3}{12}$$

On a ici une approximation à l'ordre 3 en $(b - a)$ alors que l'approximation par la méthode des rectangles ne donne qu'une approximation à l'ordre 2.



Retour à Khôlle 109 : Principe des trapèzes.

2.110 Correction Khôlle 110 : Matroïde d'une configuration de vecteurs

Retour à Khôlle 110 : Matroïde d'une configuration de vecteurs.

Exercise 2.335 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.336 (Problème principal)**.** Une famille vide est libre (par définition, il n'y a pas de dépendance linéaire dans cette famille de vecteurs). Donc, $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre (car on ne peut en trouver une dépendance linéaire) : $\forall X \in \mathcal{I}, Y \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

La vraie question commence ici. Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$. On pose $E_X = \mathrm{Vect}(v_i)_{i\in X}$ et idem pour E_Y. Imaginons que $\forall j \in Y, v_j \in E_X$, alors E_X contient une famille libre de taille $|Y|$, donc $\dim E_X = |X| > |Y|$, ce qui n'est pas. De fait, on peut prendre v_e, $e \in Y$ tel que $v_e \notin E_X$. Mais dans ce cas $(v_i)_{i\in X\cup\{e\}}$ est libre car elle est de cardinal $|X| + 1$ est engendre un espace de dimension $\geq |X| + 1$. Ainsi, $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$: on a bien un matroïde.

Exercise 2.337 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.319.

Retour à Khôlle 110 : Matroïde d'une configuration de vecteurs.

2.111 Correction Khôlle 111 : Une fonction non nulle mais localement nulle

Retour à Khôlle 111 : Une fonction non nulle mais localement nulle.

Exercise 2.338 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.339 (Problème principal)**.** Soit $(e_k)_k$ un base de E. On pose, pour chaque k, p_k tel que $f^{p_k}(e_k) = \vec{0}$ et $p = \max_k p_k$. On a alors, pour tout k : $f^p(e_k) = f^{p-p_k}(f^{p_k}(e_k)) = \vec{0}$. Soit maintenant $x \in E$ avec sa décomposition dans la base $(e_k)_k$: $x = \sum_k \alpha_k e_k$. On obtient :

$$f^p(x) = f^p\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^p(e_k) = \vec{0}$$

Ainsi, f est bien nilpotente.

Exercise 2.340 (Question subsidiaire)**.** f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, le problème est en 0.

Si on réussi à prouver que $f^{(n)}(x)$ converge quand $x \to 0$, alors on aura prouvé (par récurrence) que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout n, c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Après avoir calculé les premières dérivée, on se rend compte qu'on doit montrer par récurrence que $(H_n) : \forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ avec P_n un polynôme.

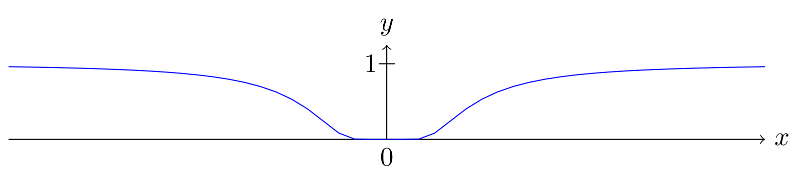
(H_0) et (H_1) sont vraies par un simple calcul.

Supposons (H_n) vraie, alors on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{3(n+1)}}\left((2 - 2nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

On a montré par récurrence, en posant $P_{n+1} = (2 - 2nX^2)P_n + X^3 P_n'$, que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$. Dès lors, $f^{(n)}(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$, on a bien démontré que $f \in \mathcal{C}^\infty$.

N.B. : On remarquera qu'on a ici une fonction dont toutes les dérivées sont nulles, donc $f(x) = o(x^n)$ pour tout n quand $x \to 0$, sans que la fonction soit nulle (la fonction tend même vers $+\infty$, et ne s'annule que en 0). **C'est un exemple très classique en analyse d'une fonction localement nulle mais pas nulle.**



Retour à Khôlle 111 : Une fonction non nulle mais localement nulle.

2.112 Correction Khôlle 112 : Réunion finie de sous-espaces stricts

Retour à Khôlle 112 : Réunion finie de sous-espaces stricts.

Exercise 2.341 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.342 (Problème principal)**.** Cet exercice est complètement équivalent à l'**??**, mais la méthode est très différente.

On va raisonner par récurrence et par l'absurde.

E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n = 1$ sous-espace strict.

Supposons maintenant que E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n-1$ sous-espaces stricts (n fixé), mais que $E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ avec F_i des sous-espaces stricts. On ne peut pas avoir $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{n}$, sans quoi $E = \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et on aurait écrit E comme une réunion de $n-1$ sous-espaces stricts. Soit alors $x \in F_1$ tel que $x \notin \bigcup_{i=2}^{n} F_i$. De même, on ne peut avoir $\bigcup_{i=2}^{n} F_i \subset F_1$ sinon $E = F_1$ (ce qui n'est pas car F_1 est un sous-espace strict). Prenons ainsi $y \in \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et $y \notin F_1$. On pose la fonction $\mathbb{K} \to [1, n]$:

$$f : \lambda \longmapsto \min\{i \ ; \ x + \lambda y \in F_i\}$$

Cette fonction est bien définie car $\forall \lambda, x + \lambda y \in E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Elle est aussi injective ! En effet, trouvons d'abord les antécédents de 1. Si $f(\lambda) = 1$, alors $x + \lambda y \in F_1$, et comme $x \in F_1$ et que F_1 est un espace vectoriel, on obtient $y \in F_1$, ce qui n'est pas. Donc $f(\lambda)$ ne vaut jamais 1.

Maintenant, supposons que $f(\lambda) = f(\mu) = j \neq 1$, alors $u = x + \lambda y \in F_j$ et $v = x + \mu y \in F_j$, donc $\mu u - \lambda v \in F_j$ car F_j est un espace vectoriel, or, par commutativité de $\mathbb{K}$:

$$\mu u - \lambda v = \mu x + \mu \lambda y - \lambda x - \lambda \mu y = (\mu - \lambda) x \in F_j$$

Comme $j \neq 1$, on a $x \notin F_j$ et comme ce dernier est un espace vectoriel, on a $\mu - \lambda = 0$: on a montré que f est injective.

Seulement, on vient de définir une fonction injective d'un ensemble infini $\mathbb{K}$ vers l'ensemble fini $[1, n]$... On a bien abouti à une contradiction, et on en déduit que E ne peut pas s'écrire comme une réunion de n sous-espaces stricts (et par récurrence, quelque soit n).

Exercise 2.343 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.315.

Retour à Khôlle 112 : Réunion finie de sous-espaces stricts.

2.113 Correction Khôlle 113 : Centre du groupe des applications linéaires

Retour à Khôlle 113 : Centre du groupe des applications linéaires.

Exercise 2.344 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.345 (Problème principal)**.** On a déjà montré que si $(x, f(x))$ est liée pour tout x, alors f est une homothétie en Exercise 1.263.

Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec toutes les autres. Si $x = \vec{0}$, alors on a bien $f(x) = \vec{0} \in \{\vec{0}\} = \mathrm{Vect}(x)$. Supposons $x \neq \vec{0}$ et posons $D = \mathrm{Vect}(x)$. Comme E est de dimension finie, on peut construire H un supplémentaire de la droite D dans E (c'est vrai de beaucoup d'espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, comme de ceux qui ont une base, mais pas de tous). Soit s la symétrie par rapport à D et parallèlement à H. s commute avec f, donc, comme $x \in D$:

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x)$$

Ainsi, $s(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) \in D = \mathrm{Vect}(x)$, et d'après la question précédente, f est un homothétie.

Réciproquement, si f est une homothétie, alors elle commute avec tous les éléments de $\mathscr{L}(E)$ car si $g \in \mathscr{L}(E)$, et $f(x) = \lambda x$, alors :

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = f(g(x))$$

Exercise 2.346 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.331.

Retour à Khôlle 113 : Centre du groupe des applications linéaires.

2.114 Correction Khôlle 114 : Base du dual de l'espace des polynômes

Retour à Khôlle 114 : Base du dual de l'espace des polynômes.

Exercise 2.347 (Question de cours)**. Cf cours !**

Exercise 2.348 (Problème principal)**.** Il y a deux possibilités. Ou bien on utilise la formule du cours qui indique que $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$ et on obtient immédiatement $\dim E^* = \dim E = n + 1$. Ou bien on en refait la démonstration. Soient E et F deux espaces de dimension finies, avec $n =\sim E$. Alors, on a la bijection $\mathscr{L}(E, F) \to F^n$ définie par $u \mapsto u(e_i)$ où $(e_i)_i$ est une base de E. Cette bijection est linéaire, c'est donc un isomorphisme et on a $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim F^n = n \times \dim F$.

Ainsi, comme la famille $(\varphi_k)_k$ est de cardinal $n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice pour obtenir que c'est une base de E^*. Soit $(\lambda_k)_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$ (l'application nulle). dès lors, on a en particulier :

$$\forall j, 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(X^j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{j!}{(j-k)!} \delta_{jk} = j! \lambda_j$$

Ainsi, $\forall j, \lambda_j = 0$ et la famille des $(\varphi_k)_k$ est libre, donc c'est une base.

Exercise 2.349 (Question subsidiaire)**.** Cf Exercise 1.316.

Retour à Khôlle 114 : Base du dual de l'espace des polynômes.